２０１３年度数学IB演習（第１回）

（４月１５日）

担当：斉藤　義久

○ 微分に関する公式

(0) $\big(f(x) \pm g(x)\big)' = f'(x) \pm g'(x)$

(1) $\big(f(x)g(x)\big)' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$

(2) $\left(\dfrac{1}{f(x)}\right)' = -\dfrac{f'(x)}{f^2(x)}$

(3) $\big(f(g(x))\big)' = f'(g(x))g'(x)$

(4) $g(x) = f^{-1}(x)$ の時，$g'(x) = \dfrac{1}{f'(g(x))}$

○ 逆三角関数の微分の公式

$$\mathrm{Arcsin}'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad \mathrm{Arccos}'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad \mathrm{Arctan}'(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

$f_1(x), f_2(x), \cdots, f_k(x)$ を，三角関数や指数関数のように，それを微分したらどうなるか？を知っている関数（=導関数の具体形が既知の関数）とする．この時，上に述べた微分の公式を用いることで，$f_1(x), f_2(x), \cdots, f_k(x)$ から，和，差，積，商，および合成関数や逆関数をとる操作の有限回の組み合せで得られる関数に関しては，それが見た目 **どんなに複雑な関数であっても，必ず導関数を計算出来る**.

[1] 次の関数の導関数を計算せよ（答えは出来るだけ整理すること）.

(1) $\log(\sin(x^2+1))$　(2) $\exp\left(\dfrac{x}{\mathrm{Arcsin}(x)}\right)$　(3) $\mathrm{Arctan}\left(\log\left(\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{\sin x}\right)\right)$

(4) $x^{\sin x}$　(5) $x^{x\mathrm{Arcsin} x}$

注）$\exp(x)$ とは e^x のこと．指数の中が複雑な場合にはこの表記法は便利.

[2] 次の等式を示せ.

(1) $\mathrm{Arcsin}(x) + \mathrm{Arccos}(x) = \pi/2$

(2) $\mathrm{Arctan}(x) + \mathrm{Arctan}(1/x) = \begin{cases} \pi/2 & (x>0) \\ -\pi/2 & (x<0) \end{cases}$

(3) $\mathrm{Arctan}(x) + \mathrm{Arctan}(y) = \mathrm{Arctan}\left(\dfrac{x+y}{1-xy}\right) \quad (xy<1)$

注）ただし等式は，全てそれが意味を持つ範囲（定義域内）で考えることとする.