２０１２年度数理科学IIプリント
（７月４日配布）

担当：斉藤　義久

● 講義中に説明出来なかった部分に関する補足

9.2 ベッセル方程式の応用

ベッセル方程式が実際の問題に現れる例として，円周上に張られた薄膜の振動現象を紹介しよう．

xy 平面上に半径 $a > 0$ の円周 $C : x^2 + y^2 = a^2$ を考え，この円周に薄膜を張る．時刻 t における位置 (x, y) の変位（高さ）を $w(t; x, y)$ とすると，次の微分方程式を満たすことが知られている（これは力学の問題！）．

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = c\Delta(w), \qquad w\big|_C = 0. \tag{9.2.1}$$

ただし，

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \qquad \text{（ラプラシアン）},$$

$$c = \sqrt{\frac{\tau}{\sigma}} > 0 \qquad (\tau\text{：膜の張力，}\sigma\text{：膜の面密度}).$$

(9.2.1) の第１式は**２次元の波動方程式**と呼ばれる．また第２式は，考える領域の境界（今の場合は円周 C 上）での解の挙動を指定するもので，境界条件とも呼ばれる．すなわち (9.2.1) は，

『$w\big|_C = 0$ なる境界条件の下に２次元波動方程式を解け』

という問題を考えていることになる．このように，ある偏微分方程式を与えられた境界条件の下に解く問題を，**偏微分方程式の境界値問題**という．

さて，(9.2.1) をいきなり解くのは難しいので，解の形を

$$w(t; x, y) = v(t)u(x, y)$$

と仮定して解いてみる（これを**変数分離法**という）．第１式から，

$$v''(t)u(x, y) = c^2 v(t)\Delta(u).$$

よって

$$\frac{v''(t)}{c^2 v(t)} = \frac{\Delta(u)}{u} = -\lambda \text{ (定数)}.$$

また第２式は

$$u\big|_C = 0.$$

したがって，$w(t; x, y) = v(t)u(x, y)$ なる仮定の下に (9.2.1) は次の３式と同値：

$$v''(t) + c^2\lambda v(t) = 0, \tag{9.2.2}$$

$$\Delta(u) + \lambda u = 0, \tag{9.2.3}$$

$$u\big|_C = 0. \tag{9.2.4}$$

(9.2.2) はすでに解き方を知っている方程式（定数係数の 2 階線形常微分方程式）で，特性方程式は

$$z^2 + c^2\lambda = 0.$$

よって，実数解の形は λ の符号で決まるが，これに関しては次が成り立つ：

Lemma 9.2.1 $\lambda > 0$ である．

Proof. (9.2.2) から

$$\Delta(u) + \lambda u = 0.$$

両辺に u を掛けてから，半径 a の円板 D 上で積分すると

$$\int_D u\Delta(u)dxdy + \lambda \int_D u^2 dxdy = 0. \tag{$*$}$$

微分形式 f を

$$f := u\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)dx + u\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right)dy$$

とおく．このとき

$$\begin{aligned} df &= \left(-\frac{\partial}{\partial y}\left(u\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(u\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right)\right)\right)dxdy \\ &= \left(\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + u\Delta(u)\right)dxdy. \end{aligned}$$

D の境界は C なので，グリーンの定理から

$$\begin{aligned} \int_D \left(\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + u\Delta(u)\right)dxdy &= \int_D df = \int_C f \\ &= \int_C u\left(\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)dx + \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right)dy\right). \end{aligned}$$

(9.2.4) より右辺は 0. よって

$$\int_D u\Delta(u)dxdy = -\int_D \left(\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right)dxdy < 0.$$

一方

$$\int_D u^2 dxdy > 0$$

だから，$(*)$ より $\lambda > 0$. □

よって (9.2.2) の実数解の基本系として

$$\cos\left(c\sqrt{\lambda}t\right), \qquad \sin\left(c\sqrt{\lambda}t\right)$$

がとれる．

一方 (9.2.3) は偏微分方程式で，まだ難しい．極座標

$$x = r\cos\theta, \qquad y = r\sin\theta$$

を導入して，もう一度変数分離法を用いる．すなわち

$$u(x,y) = u(r,\theta) = U(r)V(\theta)$$

を仮定する．このとき

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2}$$

であったので，(9.2.3) は

$$U''(r)V(\theta) + \frac{1}{r}U'(r)V(\theta) + \frac{1}{r^2}U(r)V''(\theta) + \lambda U(r)V(\theta) = 0$$

と書き直せる．これを変形して

$$\big(r^2U''(r) + rU'(r) + \lambda r^2 U(r)\big)V(\theta) = -U(r)V''(\theta)$$

すなわち，

$$\frac{r^2U''(r) + rU'(r) + \lambda r^2 U(r)}{U(r)} = -\frac{V''(\theta)}{V(\theta)} = \mu \text{（定数）}$$

を得る．したがって $U(r)$ に関しては

$$U''(r) + \frac{1}{r}U'(r) + \left(\lambda - \frac{\mu}{r^2}\right)U(r) = 0 \tag{9.2.5}$$

を得る．また (9.2.4) と $u(x,y) = U(r)V(\theta)$ から

$$U(a) = 0 \tag{9.2.6}$$

を得る．

$V(\theta)$ に関しては，上の微分方程式から得られる

$$V''(\theta) + \mu V(\theta) = 0 \tag{9.2.7}$$

に加えて，(r,θ) が極座標であったことから

$$V(0) = V(2\pi) \tag{9.2.8}$$

を得る．

(9.2.7) は定数係数の 2 階線形常微分方程式である．特性方程式は

$$z^2 + \mu = 0$$

であり，$\mu < 0$ なら指数関数で書ける実数解を，$\mu > 0$ なら三角関数で書ける実数解を持つ．ところが $V(\theta)$ が周期的であるという条件 (9.2.8) から前者はありえず，しかもその周期は

$$\frac{2\pi}{n} \qquad (n = 1, 2, \cdots)$$

でなければならないから，

$$\mu = n^2 \qquad (n = 1, 2, \cdots)$$

でなければならない．このとき (9.2.7) の解の基本形は

$$\cos(n\theta), \qquad \sin(n\theta), \qquad (n = 1, 2, \cdots)$$

である．

$\mu = 0$ のときは，(9.2.7) は高々 1 次の多項式で書ける解を持つが，(9.2.8) から定数関数しかあり得ない．したがって，この場合も併せて

$$\mu = n^2 \qquad (n = 0, 1, 2, \cdots)$$

であり，(9.2.7) の解の基本形は

$$\cos(n\theta), \qquad \sin(n\theta), \qquad (n = 0, 1, 2, \cdots)$$

であるとしてよい．

この結果を (9.2.5) に戻して

$$U''(r) + \frac{1}{r}U'(r) + \left(\lambda - \frac{n^2}{r^2}\right)U(r) = 0$$

を得る．$s = \sqrt{\lambda}r$ と変数変換して

$$J(s) = J(\sqrt{\lambda}r) := U(r)$$

とおくと，上の方程式は

$$J''(s) + \frac{1}{s}J'(s) + \left(1 - \frac{n^2}{s^2}\right)U(s) = 0 \qquad (9.2.5)'$$

となる．これはベッセル方程式に他ならない．

(9.2.5)' の決定方程式は

$$z^2 - n^2 = 0$$

で，これは根の差が整数になる場合である．したがってこの方程式はベッセル関数とノイマン関数による解の基本系を持つが，もともとの問題が薄膜の振動に関する問題であったので，解が $s = 0$ で発散しては困る．したがって物理現象の解析としては，n 次ベッセル関数による解

$$J_n(s) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(k+n)!} \left(\frac{s}{2}\right)^{n+2k}$$

のみが意味を持つ．

さらに (9.2.6) から

$$U(a) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad J_n(\sqrt{\lambda}a) = 0.$$

$J_n(s)$ の零点を小さい方から順に

$$\nu_{n,1}, \nu_{n,2}, \cdots, \nu_{n,m}, \cdots$$

と並べたとすれば，

$$\lambda = \frac{\nu_{n,m}^2}{a^2} \qquad (m = 1, 2, \cdots).$$

したがって

$$\begin{aligned} u(r,\theta) &= J_n\left(\frac{\nu_{n,m}}{a}r\right)\cos(n\theta) \qquad (n = 0, 1, \cdots,\ m = 1, 2, \cdots) \\ &\text{or} \\ &= J_n\left(\frac{\nu_{n,m}}{a}r\right)\sin(n\theta) \qquad (n = 1, 2, \cdots,\ m = 1, 2, \cdots) \end{aligned}$$

これと
$$v(t) = \cos\left(c\frac{\nu_{n,m}}{a}t\right) \quad \text{or} \quad \sin\left(c\frac{\nu_{n,m}}{a}t\right)$$
を併せて，求める解 $w(t;r,\theta) = v(t)u(r,\theta)$ が得られる．

考えている方程式 (9.2.1) は線形方程式であるので，解の重ね合わせができる．すなわち，上の組み合わせの 1 次結合で書けるようなものは，全て (9.2.1) の解である：
$$\begin{aligned} w(t;r,\theta) = &\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} a_{n,m}^{+} \cos\left(c\frac{\nu_{n,m}}{a}t\right) J_n\left(\frac{\nu_{n,m}}{a}r\right)\cos(n\theta) \\ &+ \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} a_{n,m}^{-} \sin\left(c\frac{\nu_{n,m}}{a}t\right) J_n\left(\frac{\nu_{n,m}}{a}r\right)\cos(n\theta) \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} b_{n,m}^{+} \cos\left(c\frac{\nu_{n,m}}{a}t\right) J_n\left(\frac{\nu_{n,m}}{a}r\right)\sin(n\theta) \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} b_{n,m}^{-} \sin\left(c\frac{\nu_{n,m}}{a}t\right) J_n\left(\frac{\nu_{n,m}}{a}r\right)\sin(n\theta). \end{aligned}$$

「こんなものが本当に収束しているのか？」というのはもちろん自明ではないが，答えは YES である．

さらに強く,「任意の解は上の形で書ける」ということまで知られている．つまり，変数分離法によって特別な解を探していたように思えるけれども，実はそれで十分だったのである．

Remark . この議論におけるベッセル方程式の出所は
$$\Delta(u) + \lambda u = 0$$
であった．より詳しく言えば，この方程式を極座標に変換して r 方向の微分方程式を考えると，ベッセル方程式が現れた．

今の場合 Δ は２次元のラプラシアンであったが，３次元のラプラシアンであっても極座標に変換して r 方向の微分方程式を考えると，やはりベッセル方程式が得られる．考えている問題によって必ずしも極座標変換を行うことが適切であるとは言えないが，今の例のように問題が回転対称性を持っている場合には極座標で表示した方が問題は簡単になる．

電磁気学や量子力学，あるいは工学においても
$$\Delta(u) + \lambda u = 0$$
のタイプの方程式は頻繁に現れる．ベッセル方程式の重要性が理解されるであろう．