数理科学II・演習問題
２０１２年6月２７日配布

担当：斉藤　義久

例題１： $x' = \cos(x+t)$ を解け.

(解)　$y(t) = x(t) + t$ とおく.

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dx}{dt} + 1 = \cos y + 1$$

なので，y の方程式として変数分離形.

$$\int \frac{dy}{1+\cos y} = \int dt$$

であるが,

$$（左辺）= \frac{1}{2}\int \frac{dy}{\cos^2 \frac{y^2}{2}} = \tan\frac{y}{2} = \tan\frac{x+t}{2}.$$

よって

$$\tan\frac{x+t}{2} = t + C.$$

したがって

$$x(t) = 2\mathrm{Arctan}(t+C) - t \quad （答）$$

例題２： $x' = \dfrac{x-t}{x+t}$ を解け.

(解)　$f(t,x) = \dfrac{x-t}{x+t}$ とおくと,

$$f(\lambda t, \lambda x) = \frac{\lambda(x-t)}{\lambda(x+t)} = f(t,x)$$

なので，これは同次型．したがって $u = x/t$ とおいて u に関する方程式に直すと，変数分離形になる：

$$x' = u + tu' = \frac{u-1}{u+1} \quad \Rightarrow \quad u' = -\frac{u^2+1}{t(u+1)}$$

よって

$$\int \frac{u+1}{u^2+1} du = -\int \frac{dt}{t}.$$

$$（左辺）= \frac{1}{2}\log(u^2+1) + \mathrm{Arctan}u + C,$$

$$（右辺）= -\log|t| + C.$$

ゆえに

$$\frac{1}{2}\log(\frac{x^2}{t}+1)+\mathrm{Arctan}\frac{x}{t}+\log|t|=\frac{1}{2}\log(x^2+t^2)+\mathrm{Arctan}\frac{x}{t}=C \quad \text{（答）}$$

注） 上の形だと「解がどんな形のグラフになっているのか？」が見にくいけれども，

$$t=r\cos\theta,\quad x=r\sin\theta$$

で極座標に変換すると，実は非常にきれいな形をしていることがわかる．実際，

$$x^2+t^2=r^2,\quad \frac{x}{t}=\frac{r\sin\theta}{r\cos\theta}=\tan\theta$$

だから，

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\log(x^2+t^2)+\mathrm{Arctan}\frac{x}{t}=C &\Leftrightarrow \log r+\theta=C\\ &\Leftrightarrow r=C'e^{-\theta}\quad (C'=e^C)\end{aligned}$$

となる．これは対数螺旋と呼ばれる曲線.

<u>例題３</u>： $x'=-\dfrac{3t^2x+x^2+2}{t^3+2tx-2x}$ を解け.

(解)　これは同次型ではない．しかし

$$\text{（与式）}\quad\Leftrightarrow\quad (3t^2x+x^2+2)+(t^3+2tx-2x)x'=0$$

であり，

$$\frac{\partial}{\partial x}(3t^2x+x^2+2)=3t^2+2x=\frac{\partial}{\partial t}(t^3+2tx-2x)$$

だから，全微分型である．

$$P(t,x)=3t^2x+x^2+2,\quad Q(t,x):=t^3+2tx-2x$$

として

$$\begin{aligned}\varphi(t,x)&=\int_{t_0}^{t}P(t,x)dt+\int_{x_0}^{x}Q(t_0,x)dx\\ &=\int_{t_0}^{t}(3t^2x+x^2+2)dt+\int_{x_0}^{x}(t_0^3+2t_0x-2x)dx\\ &=t^3x+tx^2+2t-x^2+C.\end{aligned}$$

よって一般解は

$$t^3x+tx^2+2t-x^2+C=0 \quad \text{（答）}$$

<u>例題４</u>： $x'' + x' + x = t^2 + e^t \sin t$ を解け.

(解)　対応する斉次方程式は

$$x'' + x' + x = 0$$

であり，その特性多項式は

$$P(z) = z^2 + z + 1 = \left(z + \frac{1 - \sqrt{-3}}{2}\right)\left(z + \frac{1 + \sqrt{-3}}{2}\right).$$

よって複素数の範囲での一般解は

$$x(t) = C_1 e^{(\frac{-1+\sqrt{-3}}{2})t} + C_2 e^{(\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}t)} \quad (C_1, C_2 \in \mathbb{C}).$$

また実数解は

$$x(t) = C_1 e^t \cos\frac{\sqrt{3}}{2}t + C_2 e^t \sin\frac{\sqrt{3}}{2}t \quad (C_1, C_2 \in \mathbb{R}).$$

あとは与えられた非斉次方程式の特殊解を求めればよい．しかし非斉次項は

$$e^{\gamma t} q(t)$$

の形をしていないので講義中にやったパターンには収まらず,「ここままでは解けない！」と思うかもしれない．しかしちょっとした応用で，うまく解くことができる．

補助的に次の２つの非斉次方程式を考えよう.

$$x'' + x' + x = t^2, \qquad x'' + x' + x = e^t \sin t.$$

各々は講義中にやったパターンにはまるので，特殊解を求めることができることに注意する．第１の方程式の特殊解を $x_1(t)$, 第２の方程式の特殊解を $x_2(t)$ とし，

$$x_0(t) := x_1(t) + x_2(t)$$

とおく．このとき

$$\begin{aligned}
(D^2 + D + 1)x_0 &= (D^2 + D + 1)(x_1 + x_2) \\
&= \left\{(D^2 + D + 1)x_1\right\} + \left\{(D^2 + D + 1)x_2\right\} \\
&= t^2 + e^t \sin t.
\end{aligned}$$

である．すなわち $x_0(t) := x_1(t) + x_2(t)$ は与えられた方程式の特殊解である.

つまり，非斉次項が $e^{\gamma_i t}q_i(t)$ の和の形になっている時には，これらをバラして補助的な非斉次方程式を考え，各々の特殊解を構成した上で最後に全て足し合わせれば良いのである．

まず $x'' + x' + x = t^2$ を考えよう．$q(t) = t^2$ $(m = 2)$, $\gamma = 0$ の場合にあたる．

$$P(D) = 1 - D(-(D+1)) \qquad (Q(D) = -(D+1))$$

であるので，特殊解 $x_1(t)$ は

$$x_1(t) = (1 + DQ(D) + D^2Q(D)^2)q(t) = (1 - D + 2D^3 + D^4)t^2 = t^2 - 2t.$$

こんどは $x'' + x' + x = e^t \sin t$ を考える．非斉次項 $e^t \sin t$ は $e^{(1+\sqrt{-1})t}$ の虚部であるので，$x'' + x' + x = e^t \sin t$ の特殊解 $x_2(t)$ を得るには，

$$x'' + x' + x = e^{(1+\sqrt{-1})t} \tag{$*$}$$

の（複素数の範囲での）特殊解 $X_2(t)$ を作り，その虚部を取ればよい．これは $q(t) = 1$ $(m = 0)$, $\gamma = 1 + \sqrt{-1}$ の場合であることにも注意しておく．

$$(*) \quad \Leftrightarrow \quad P(D + (1 + \sqrt{-1}))(e^{-(1+\sqrt{-1})t}x(t)) = 1.$$

$$P(D + (1 + \sqrt{-1})) = D^2 + (3 + 2\sqrt{-1})D + (2 + 3\sqrt{-1})$$

なので，

$$(*) \quad \Leftrightarrow \quad (D^2 + (3 + 2\sqrt{-1})D + (2 + 3\sqrt{-1}))(e^{-(1+\sqrt{-1})t}x(t)) = 1.$$

したがって

$$e^{-(1+\sqrt{-1})t}x(t) = \frac{1}{2 + 3\sqrt{-1}} = \frac{2}{13} - \frac{3}{13}\sqrt{-1} \quad （定数関数）$$

とおけば，これは特殊解となる[1]．ゆえに $(*)$ の特殊解 $X_2(t)$ は

$$\begin{aligned} X_2(t) &= \left(\frac{2}{13} - \frac{3}{13}\sqrt{-1}\right)e^{(1+\sqrt{-1})t} \\ &= \left(\frac{2}{13}e^t \cos t + \frac{3}{13}e^t \sin t\right) + \sqrt{-1}\left(\frac{2}{13}e^t \sin t - \frac{3}{13}e^t \cos t\right). \end{aligned}$$

[1]講義中に述べた一般論によれば，

$$P(D + (1 + \sqrt{-1})) = D^2 + (3 + 2\sqrt{-1})D + (2 + 3\sqrt{-1})$$

と展開したところで，$P(z)$ の定数項を 1 にするように適当な定数（今の場合は $2 + 3\sqrt{-1}$）で割る必要があった．非斉次項が複雑な多項式である場合にはこのような計算方法も有効であるが，今の場合には非斉次項は 1（定数関数）なので，そのような操作を経ずとも簡単に特殊解を構成出来る．何事も公式をバカ正直にあてはめるのではなく，臨機応変な対応が肝心である．

よって $x'' + x' + x = e^t \sin t$ の特殊解 $x_2(t)$ は

$$x_2(t) = \frac{2}{13} e^t \sin t - \frac{3}{13} e^t \cos t$$

で与えられる．

以上の議論を併せて，問題の方程式 $x'' + x' + x = t^2 + e^t \sin t$ の一般解は，

$$x(t) = C_1 e^{(\frac{-1+\sqrt{-3}}{2})t} + C_2 e^{(\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}t)} + t^2 - 2t + \frac{2}{13} e^t \sin t - \frac{3}{13} e^t \cos t \quad (C_1, C_2 \in \mathbb{C}).$$

また実数解は

$$x(t) = C_1 e^t \cos \frac{\sqrt{3}}{2} t + C_2 e^t \sin \frac{\sqrt{3}}{2} t + t^2 - 2t + \frac{2}{13} e^t \sin t - \frac{3}{13} e^t \cos t \quad (C_1, C_2 \in \mathbb{R}).$$

例題５：$t^2 x'' + 3tx' + x = t + t^{-1}$ を解け．

(解説) これは講義中に解法をやらなかったタイプの方程式で，**オイラー型方程式**と呼ばれる．まず定義を述べておく．

定義． $a_1, \cdots, a_n$ を定数として

$$t^n x^{(n)}(t) + a_1 t^{n-1} x^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1} t x'(t) + a_n x(t) = f(t)$$

なる形の微分方程式をオイラー型方程式という．

オイラー型方程式については次が知られている．

命題． $t = e^s$ なる変数変換を施すと，オイラー型方程式は定数係数線形方程式に変換される．

(証明) 定義から $s = \log t$ であることに注意する．

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dx}{ds}\frac{ds}{dt} = \frac{1}{t}\frac{dx}{ds}$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2 x}{dt^2} &= \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{t}\frac{dx}{ds}\right) = -\frac{1}{t^2}\frac{dx}{ds} + \frac{1}{t}\frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{ds}\right) = -\frac{1}{t^2}\frac{dx}{ds} + \frac{1}{t}\frac{d^2 x}{ds^2}\frac{ds}{dt} \\ &= \frac{1}{t^2}\frac{d}{ds}\left(\frac{d}{ds} - 1\right) x \end{aligned}$$

以下 $D_s = \frac{d}{ds}$ と書こう．同様の計算を繰り返していくことで，

$$\frac{d^k x}{dt^k} = \frac{1}{t^k} D_s (D_s - 1) \cdots (D_s - k + 1) x$$

が示される（まじめにやるには数学的帰納法で示すことになる）．これをオイラー型方程式に代入して命題を得る． □

(例題５の解)　$t = e^s$ と変数変換する．このとき与えられた方程式は

$$t^2 \cdot \frac{1}{t^2} D_s (D_s - 1) x + 3t \cdot \frac{1}{t} D_s x + x = e^s + e^{-s} \quad \Leftrightarrow \quad (D_s + 1)^2 x = e^s + e^{-s}$$

となり，s を変数とする定数係数の線形方程式（非斉次）に変換される．この方程式の斉次方程式は

$$(D_s + 1)^2 x = 0$$

で，その特性根は -1（重根）．よって一般解は

$$x(s) = C_1 e^{-s} + C_2 s e^{-s}.$$

非斉次方程式 $(D_s + 1)^2 x = e^s + e^{-s}$ の特殊解を構成するために，補助的に

$$(D_s + 1)^2 x = e^s, \qquad (D_s + 1)^2 x = e^{-s}$$

を考える．第１の方程式の両辺に e^{-s} をかけて

$$e^{-s}(D_s + 1)^2 x = ((D_s + 1) + 1)^2 (e^{-s} x) = (D_s + 2)^2 (e^{-s} x) = 1.$$

したがって特殊解として

$$e^{-s} x_1(s) = \frac{1}{4} \quad \Leftrightarrow \quad x_1(s) = \frac{e^s}{4}$$

が取れる．一方，第２の方程式の両辺に e^s をかけて

$$e^s (D_s + 1)^2 x = D_s^2 (e^s x) = 1$$

したがって特殊解として

$$e^s x_2(s) = \frac{s^2}{2} \quad \Leftrightarrow \quad x_2(s) = \frac{s^2 e^{-s}}{2}$$

が取れる．あわせて $(D_s + 1)^2 x = e^s + e^{-s}$ の一般解は

$$x(s) = C_1 e^{-s} + C_2 s e^{-s} + \frac{e^s}{4} + \frac{s^2 e^{-s}}{2}.$$

これを $t = e^s$ の関数の形に直すと

$$x(t) = C_1 \frac{1}{t} + C_2 \frac{\log t}{t} + \frac{t}{4} + \frac{(\log t)^2}{2t} \quad \text{（答）}$$

<u>例題６</u>：$x''+\frac{b}{m}x'+\frac{c}{m}x=f(t)\quad(b^2-4mc<0)$ を解け．

(コメント) これは例 1.1.2 の強制振動の方程式である．$f(t)$ の形が指定されていないので，解を求めるには 4.3 節の方法（１階行列化して，定理 4.3.1 を使う方法）しかない．一般解でなく初期値問題であれば，７節で解説した「ラプラス変換」を用いる方法もある．

(例題６の解)　斉次方程式は

$$x''+\frac{b}{m}x'+\frac{c}{m}x=0\quad\left(\text{特性方程式：}P(z)=z^2+\frac{b}{m}z+\frac{c}{m}=0\right).$$

$b^2-4mc<0$ だから，これは例 5.3.3 の (3) の場合（振動する場合）にあたる．特性根 λ_1,λ_2 を

$$\lambda_1=\alpha+\beta\sqrt{-1},\quad \lambda_2=\alpha+\beta\sqrt{-1}\qquad(\alpha,\beta\in\mathbb{R})$$

と書けば，斉次方程式の実数の範囲の解の基本系は

$$x_1(t):=e^{\alpha t}\cos\beta t,\ x_2(t):=e^{\alpha t}\sin\beta t.$$

特殊解を構成するために，方程式を行列型に直す．この場合の解の基本系は

$$\mathbf{x}_1=\begin{pmatrix}x_1(t)\\x_1'(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}e^{\alpha t}\cos\beta t\\ \alpha e^{\alpha t}\cos\beta t-\beta e^{\alpha t}\sin\beta t\end{pmatrix},$$

$$\mathbf{x}_2=\begin{pmatrix}x_2(t)\\x_2'(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}e^{\alpha t}\sin\beta t\\ \alpha e^{\alpha t}\sin\beta t+\beta e^{\alpha t}\cos\beta t\end{pmatrix}.$$

よって基本行列 $V(t)$ は

$$V(t)=\begin{pmatrix}e^{\alpha t}\cos\beta t & e^{\alpha t}\sin\beta t\\ \alpha e^{\alpha t}\cos\beta t-\beta e^{\alpha t}\sin\beta t & \alpha e^{\alpha t}\sin\beta t+\beta e^{\alpha t}\cos\beta t\end{pmatrix}.$$

逆行列を計算するために，$\det V(t)$ を求めておく．

$$\begin{aligned}\det V(t)&=e^{2\alpha t}\cos\beta t\big(\alpha\sin\beta t+\beta\cos\beta t\big)-e^{2\alpha t}\sin\beta t\big(\alpha\cos\beta t-\beta\sin\beta t\big)\\&=\beta e^{2\alpha t}.\end{aligned}$$

よって

$$\begin{aligned}V(t)^{-1}&=\frac{1}{\beta e^{2\alpha t}}\begin{pmatrix}\alpha e^{\alpha t}\sin\beta t+\beta e^{\alpha t}\cos\beta t & -e^{\alpha t}\sin\beta t\\ -\alpha e^{\alpha t}\cos\beta t+\beta e^{\alpha t}\sin\beta t & e^{\alpha t}\cos\beta t\end{pmatrix}\\&=\frac{1}{\beta}\begin{pmatrix}\alpha e^{-\alpha t}\sin\beta t+\beta e^{-\alpha t}\cos\beta t & -e^{-\alpha t}\sin\beta t\\ -\alpha e^{-\alpha t}\cos\beta t+\beta e^{-\alpha t}\sin\beta t & e^{-\alpha t}\cos\beta t\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

$$\mathbf{f}(t) := \begin{pmatrix} 0 \\ f(t) \end{pmatrix}$$

として

$$V(t)^{-1}\mathbf{f}(t) = \frac{1}{\beta}\begin{pmatrix} -f(t)e^{-\alpha t}\sin\beta t \\ f(t)e^{-\alpha t}\cos\beta t \end{pmatrix}.$$

特殊解 $\mathbf{x}_0(t)$ は

$$\mathbf{x}_0(t) = V(t)\int_{t_0}^{t} V(\tau)\mathbf{f}(\tau)d\tau \tag{$*$}$$

であったが，単独型の方程式と行列型の方程式の関係から，単独型の方程式の特殊解を $x_0(t)$ として，

$$\mathbf{x}_0(t) = \begin{pmatrix} x_0(t) \\ x_0'(t) \end{pmatrix}$$

となっているはずである．したがって $(*)$ の第一成分を求めればよく，

$$\begin{aligned} x_0(t) &= \frac{1}{\beta}\left\{-e^{\alpha t}\cos\beta t\int_{t_0}^{t} f(\tau)e^{-\alpha\tau}\sin\beta\tau d\tau + e^{\alpha t}\sin\beta t\int_{t_0}^{t} f(\tau)e^{-\alpha\tau}\cos\beta\tau d\tau\right\} \\ &= \frac{1}{\beta}\int_{t_0}^{t} f(\tau)e^{\alpha(t-\tau)}\left\{-\cos\beta t\sin\beta\tau + \sin\beta t\cos\beta\tau\right\}d\tau \\ &= \frac{1}{\beta}\int_{t_0}^{t} f(\tau)e^{\alpha(t-\tau)}\sin\beta(t-\tau)d\tau. \end{aligned}$$

したがって一般解は

$$x(t) = C_1e^{\alpha t}\cos\beta t - C_2e^{\alpha t}\sin\beta t + \frac{1}{\beta}\int_{t_0}^{t} f(s)e^{\alpha(t-s)}\sin\beta(t-s)ds.$$

$t_0 = 0$ として，初期条件を

$$x(0) = 0, \quad x'(0) = 0$$

とすると，

$$C_1 = C_2 = 0$$

なる．よってこの場合の解は

$$x(t) = \frac{1}{\beta}\int_{t_0}^{t} f(s)e^{\alpha(t-s)}\sin\beta(t-s)ds.$$

<u>例題７</u>：次の連立微分方程式を解け.

$$\begin{cases} x_1'(t) = x_1(t) + 2x_2(t) \\ x_2'(t) = 2x_1(t) + x_2(t) \end{cases}$$

（コメント）これは講義中の例 6.3.1 と全く同じ方程式である．講義中は行列の指数関数を用いいた解法を解説したが，一般に「解き方」というのは１通りではなく，いろいろなやり方がある．ここでは別の方法でやってみよう．

（例題７の解（例 6.3.1 の別解））第１式と第２式を加えると

$$x_1' + x_2' = 3x_1 + 3x_2.$$

よって $y_1(t) = x_1(t) + x_2(t)$ とおけば

$$y_1' = 3y_1$$

である．これを解いて

$$y_1(t) = x_1(t) + x_2(t) = C_1 e^{3t} \tag{$*$}$$

一方，第１式から第２式を引いて

$$x_1' - x_2' = -x_1 + x_2.$$

$y_2(t) = x_1(t) - x_2(t)$ とおけば，

$$y_2' = -y_2.$$

これを解いて

$$y_2(t) = x_1(t) - x_2(t) = C_2 e^{-t} \tag{$**$}$$

$(*), (**)$ から

$$x_1(t) = \frac{1}{2}(C_1 e^{3t} + C_2 e^{-t}), \quad x_2(t) = \frac{1}{2}(C_1 e^{3t} - C_2 e^{-t}).$$

（解説）比べてみればわかると思うが，上のやり方の方が「簡単」に感じるだろう．コメント欄で述べたように，解き方というのは１つではないので，その場に応じて「簡単な方法」を選択することが肝要である．ちなみに線形代数の理論によれば，この２つの方法は「同じことを別の方法で計算しているだけ」であることがわかる．興味のあるものは，なぜ両者が同じ計算をしていることになるのか，考えてみるとよいだろう．

上のような計算方法は 2×2 程度であれば速いが，行列のサイズが大きくなるにしたがって，行列の指数関数を計算してしまった方が楽になる場合もありうる．特に一般論を論じる場合には行列の指数関数を用いる方法の方が圧倒的に見通しが良い．ただし（繰り返しになるが），具体的な計算の場合には「どちらを選択するか？」は case by case なのであって，一般的な処方箋はない．大事なことは，いろいろな計算方法を知った上で，一番いい方法（楽な方法）を選ぶことだと思う．

（例題７の解その２）この問題の場合は，先の解き方で解くのが一番簡単だと思うが，もう少し汎用性の高い，別の方法も紹介しておこう．基本的なアイデアは

「２つの連立方程式からうまく未知関数を消去して，
１つの未知関数に関する（単独の）方程式に直す」

というものである．

与えられた方程式は

$$\begin{cases} (D-1)x_1(t) - 2x_2(t) = 0 \\ 2x_1(t) - (D-1)x_2(t) = 0 \end{cases}$$

と書き直せる．ここから $x_1(t)$ のみの式を得ようと思えば，第１式の両辺に $(D-1)$，第２式を２倍して，辺々引き算すればよい：

$$\begin{aligned} &(D-1)\bigl\{(D-1)x_1(t) - 2x_2(t)\bigr\} - 2\bigl\{2x_1(t) - (D-1)x_2(t)\bigr\} \\ &\qquad = (D-1)^2 x_1(t) - 4x_1(t) = (D^2 - 2D - 3)x_1(t) \\ &\qquad = (D-3)(D+1)x_1(t) = 0. \end{aligned}$$

よって，

$$x_1(t) = C_1 e^{3t} + C_2 e^{-t}.$$

この結果を第１式に代入して，

$$\begin{aligned} x_2(t) &= \frac{1}{2}(D-1)(C_1 e^{3t} + C_2 e^{-t}) \\ &= \frac{1}{2}\bigl\{(3C_1 e^{3t} - C_2 e^{-t}) - (C_1 e^{3t} + C_2 e^{-t})\bigr\} \\ &= C_1 e^{3t} - C_2 e^{-t}. \end{aligned}$$

（解説）この方法は次のように一般化できる：与えられた連立方程式が

$$\begin{cases} P(D)x_1(t) + Q(D)x_2(t) = f_1(t) \\ R(D)x_1(t) + S(D)x_2(t) = f_2(t) \end{cases}$$

であったとする．ここから $x_2(t)$ を消去したい場合は，第１式に $S(D)$, 第２式に $Q(D)$ を施して辺々引き算すればよい．

$$\begin{aligned} (\text{左辺}) &= S(D)\bigl\{P(D)x_1(t) + Q(D)x_2(t)\bigr\} - Q(D)\bigl\{R(D)x_1(t) + S(D)x_2(t)\bigr\} \\ &= \bigl\{S(D)P(D) - Q(D)R(D)\bigr\}x_1(t). \end{aligned}$$

$$(\text{右辺}) = S(D)f_1(t) - Q(D)f_2(t).$$

すなわち，$x_1(t)$ のみの単独の方程式

$$\bigl\{S(D)P(D) - Q(D)R(D)\bigr\}x_1(t) = S(D)f_1(t) - Q(D)f_2(t)$$

を得る．この方程式が解ければ，その結果を第１式，もしくは第２式に代入して，$x_2(t)$ に関する単独の方程式を得る．

<u>例題８</u>：次の連立微分方程式を解け.

$$\begin{cases} x_1'(t) = x_2(t) + t\cos t \\ x_2'(t) = 2x_1(t) - t\sin t - \cos t \end{cases}$$

（解説）これは１階行列形の非斉次方程式である．講義中にやった一般論によれば「基本行列を求めて，定理 4.3.1 を適用」ということになる．一方，例題７でも述べたように別の方法で解くこともできる．ここでは両方の解法でやってみよう．２つの解法を見比べて，よく吟味してもらいたい.

（例題８の解その１）例題７の第２解法のアイデアでやってみる．与えられた連立方程式は

$$\begin{cases} Dx_1(t) - x_2(t) = t\cos t \\ 2x_1(t) - Dx_2(t) = t\sin t + \cos t \end{cases}$$

と書ける．第１式に D を施して

$$D^2x_1(t) - Dx_2(t) = -t\sin t + \cos t.$$

第２式と辺々引き算して，

$$(D^2-2)x_1(t) = (D-\sqrt{2})(D+\sqrt{2})x_1(t) = -2t\sin t.$$

対応する斉次方程式 $(D-\sqrt{2})(D+\sqrt{2})x_1(t) = 0$ の一般解は

$$C_1e^{\sqrt{2}t} + C_2e^{-\sqrt{2}t}.$$

方程式 $(D^2-2)x_1 = -2t\sin t$ の特殊解を求めるために，

$$\begin{aligned} &(D^2-2)x_1 = P(D)x_1(t) = -2te^{\sqrt{-1}t} \\ &\qquad\Leftrightarrow\quad e^{-\sqrt{-1}t}P(D)x_1(t) = P(D-\sqrt{-1})e^{-\sqrt{-1}t}x_1(t) = -2t \end{aligned}$$

を考える．ここで

$$\begin{aligned} P(D-\sqrt{-1}) &= (D-\sqrt{-1})^2 - 2 = D^2 - 2\sqrt{-1}D - 3 \\ &= -3\left\{1 - \left(-\frac{2}{3}\sqrt{-1}D + \frac{1}{3}D^2\right)\right\} \end{aligned}$$

であるから，$P(D-\sqrt{-1})y_1(t)=-2t$ の特殊解として，

$$\begin{aligned}y_1(t)&=\left\{1+\left(-\frac{2}{3}\sqrt{-1}D+\frac{1}{3}D^2\right)\right\}\frac{2}{3}t\\&=\frac{2}{3}t-\frac{4}{9}\sqrt{-1}\end{aligned}$$

がとれる．したがって，

$$x_1(t)=e^{\sqrt{-1}t}y_1(t)=\frac{2}{3}t\cos t-\frac{4}{9}\sin t+\sqrt{-1}\left(\frac{4}{9}\cos t+\frac{2}{3}t\sin t\right)$$

は $x_1''-2x_1=P(D)x_1(t)=-2te^{\sqrt{-1}t}$ の特殊解である．両辺の虚部をとって

$$x_1(t)=\frac{4}{9}\cos t+\frac{2}{3}t\sin t$$

が方程式 $(D^2-2)x_1=-2t\sin t$ の特殊解となる．よって方程式 $(D^2-2)x_1=-2t\sin t$ の一般解は

$$x_1(t)=C_1e^{\sqrt{2}t}+C_2e^{-\sqrt{2}t}+\frac{4}{9}\cos t+\frac{2}{3}t\sin t.$$

与えられた連立微分方程式の第１式から

$$\begin{aligned}x_2(t)&=x_1'(t)-t\cos t\\&=\left(\sqrt{2}C_1e^{\sqrt{2}t}-\sqrt{2}C_2e^{-\sqrt{2}t}+\frac{2}{9}\sin t+\frac{2}{3}t\cos t\right)-t\cos t\\&=\sqrt{2}C_1e^{\sqrt{2}t}-\sqrt{2}C_2e^{-\sqrt{2}t}+\frac{2}{9}\sin t-\frac{1}{3}t\cos t.\end{aligned}$$

以上より答は

$$\begin{aligned}x_1(t)&=C_1e^{\sqrt{2}t}+C_2e^{-\sqrt{2}t}+\frac{4}{9}\cos t+\frac{2}{3}t\sin t\\x_2(t)&=\sqrt{2}C_1e^{\sqrt{2}t}-\sqrt{2}C_2e^{-\sqrt{2}t}+\frac{2}{9}\sin t-\frac{1}{3}t\cos t\end{aligned}$$

（解法その２：講義中にやった解法）与えられた方程式を行列形に直せば

$$\begin{pmatrix}x_1'(t)\\x_2'(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1\\2&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1(t)\\x_2(t)\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}t\cos t\\-t\sin t-\cos t\end{pmatrix}\qquad(*)$$

よって対応する斉次方程式は

$$\begin{pmatrix}x_1'(t)\\x_2'(t)\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}x_1(t)\\x_2(t)\end{pmatrix}\qquad\left(A=\begin{pmatrix}0&1\\2&0\end{pmatrix}\right).$$

A の固有方程式は $z^2-2=0$ で，固有値は $\pm\sqrt{2}$．したがって

$$P_1=\frac{1}{\sqrt{2}-(-\sqrt{2})}(A-(-\sqrt{2})E)=\frac{1}{2\sqrt{2}}\begin{pmatrix}\sqrt{2} & 1\\ 2 & \sqrt{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2}\end{pmatrix},$$

$$P_2=\frac{1}{-\sqrt{2}+\sqrt{2}}(A-(\sqrt{2})E)=-\frac{1}{2\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-\sqrt{2} & 1\\ 2 & -\sqrt{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{1}{2\sqrt{2}}\\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}.$$

ゆえに

$$\begin{aligned}\exp tA&=e^{\sqrt{2}t}\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}+e^{-\sqrt{2}t}\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{1}{2\sqrt{2}}\\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}\\ &=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\left(e^{\sqrt{2}t}+e^{-\sqrt{2}t}\right) & \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(e^{\sqrt{2}t}-e^{-\sqrt{2}t}\right)\\ \frac{1}{\sqrt{2}}\left(e^{\sqrt{2}t}-e^{-\sqrt{2}t}\right) & \frac{1}{2}\left(e^{\sqrt{2}t}+e^{-\sqrt{2}t}\right)\end{pmatrix}\end{aligned}$$

一般論から，これが斉次方程式の基本行列 $V(t)$ なのであった．したがって斉次方程式の一般解は C_1,C_2 を定数として

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\end{pmatrix}&=C_1\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\left(e^{\sqrt{2}t}+e^{-\sqrt{2}t}\right)\\ \frac{1}{\sqrt{2}}\left(e^{\sqrt{2}t}-e^{-\sqrt{2}t}\right)\end{pmatrix}+C_2\begin{pmatrix}\frac{1}{2\sqrt{2}}\left(e^{\sqrt{2}t}-e^{-\sqrt{2}t}\right)\\ \frac{1}{2}\left(e^{\sqrt{2}t}+e^{-\sqrt{2}t}\right)\end{pmatrix}\\ &=e^{\sqrt{2}t}\begin{pmatrix}\frac{C_1}{2}+\frac{C_2}{2\sqrt{2}}\\ \frac{C1}{\sqrt{2}}+\frac{C_2}{2}\end{pmatrix}+e^{-\sqrt{2}t}\begin{pmatrix}\frac{C_1}{2}-\frac{C_2}{2\sqrt{2}}\\ -\frac{C1}{\sqrt{2}}+\frac{C_2}{2}\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

ここで

$$C_1'=\frac{C_1}{2}+\frac{C_2}{2\sqrt{2}},\quad C_2'=\frac{C_1}{2}-\frac{C_2}{2\sqrt{2}}$$

とおけば,

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\end{pmatrix}&=C_1'e^{\sqrt{2}t}\begin{pmatrix}1\\ \sqrt{2}\end{pmatrix}+C_2'e^{-\sqrt{2}t}\begin{pmatrix}1\\ -\sqrt{2}\end{pmatrix}\\ &=\begin{pmatrix}C_1'e^{\sqrt{2}t}+C_2'e^{-\sqrt{2}t}\\ \sqrt{2}C_1'e^{\sqrt{2}t}-\sqrt{2}C_2'e^{-\sqrt{2}t}\end{pmatrix}\end{aligned}$$

と書けることに注意しよう．

ところで定理 4.3.1 によって非斉次方程式の一般解を求めるには，基本行列の逆行列 $V(t)^{-1}$ を求める必要があった．今の場合，$V(t)=\exp tA$ なので，逆行列は簡単に求めることができる．実際,

$$(\exp tA)^{-1}=\exp(-tA)$$

である．

(∵) A と $-A$ は可換だから，補題 6.1.2 より

$$(\exp tA)(\exp(-tA)) = (\exp(-tA))(\exp tA) = \exp t(A-A) = E$$

これは $(\exp tA)^{-1} = \exp(-tA)$ に他ならない． □

今の場合，

$$\begin{aligned}
V(t)^{-1} &= \exp(-tA) \\
&= \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\left(e^{-\sqrt{2}t} + e^{\sqrt{2}t}\right) & \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(e^{-\sqrt{2}t} - e^{\sqrt{2}t}\right) \\ \frac{1}{\sqrt{2}}\left(e^{-\sqrt{2}t} - e^{\sqrt{2}t}\right) & \frac{1}{2}\left(e^{-\sqrt{2}t} + e^{\sqrt{2}t}\right) \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

である．あとは定理 4.3.1 によって特殊解を構成すればよい．

$$\begin{aligned}
V(t)^{-1}\mathbf{f}(t) &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\left(e^{-\sqrt{2}t} + e^{\sqrt{2}t}\right) & \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(e^{-\sqrt{2}t} - e^{\sqrt{2}t}\right) \\ \frac{1}{\sqrt{2}}\left(e^{-\sqrt{2}t} - e^{\sqrt{2}t}\right) & \frac{1}{2}\left(e^{-\sqrt{2}t} + e^{\sqrt{2}t}\right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t\cos t \\ -t\sin t - \cos t \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{t\cos t}{2}\left(e^{-\sqrt{2}t} + e^{\sqrt{2}t}\right) - \frac{t\sin t + \cos t}{2\sqrt{2}}\left(e^{-\sqrt{2}t} - e^{\sqrt{2}t}\right) \\ \frac{t\cos t}{\sqrt{2}}\left(e^{-\sqrt{2}t} - e^{\sqrt{2}t}\right) - \frac{t\sin t + \cos t}{2}\left(e^{-\sqrt{2}t} + e^{\sqrt{2}t}\right) \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

右辺の各成分を 0 から t まで積分した結果が

$$\int_0^t V(\tau)^{-1}\mathbf{f}(\tau)d\tau$$

である[2]．これを計算しておいてから，このタテベクトルに左から $V(t) = \exp tA$ を掛けることで特殊解 $\mathbf{x}_0(t)$ が得られる．途中の計算を書くとものすごく長くなってしまうので，最終的な結果のみ書くと，

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}_0(t) &= V(t)\int_0^t V(\tau)^{-1}\mathbf{f}(\tau)d\tau \\
&= \begin{pmatrix} \frac{4}{9}\cos t + \frac{2}{3}t\sin t \\ \frac{2}{9}\sin t - \frac{1}{3}t\cos t \end{pmatrix} - \frac{2}{9}e^{\sqrt{2}t}\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} - \frac{2}{9}e^{-\sqrt{2}t}\begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

[2] まじめにやるとかなり面倒だが，面倒なだけで難しくはない.「数学 I」の範囲で十分計算出来る．

となる．先に求めた斉次方程式の一般解と併せれば，求める方程式の一般解は

$$
\begin{aligned}
\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} &= (C_1' - 2/9)e^{\sqrt{2}t} \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} + (C_2' - 2/9)e^{-\sqrt{2}t} \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix} \\
&\quad + \begin{pmatrix} \frac{4}{9}\cos t + \frac{2}{3}t\sin t \\ \frac{2}{9}\sin t - \frac{1}{3}t\cos t \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} C_1'' e^{\sqrt{2}t} + C_2'' e^{-\sqrt{2}t} + \frac{4}{9}\cos t + \frac{2}{3}t\sin t \\ \sqrt{2}C_1'' e^{\sqrt{2}t} - \sqrt{2}C_2'' e^{-\sqrt{2}t} + \frac{2}{9}\sin t - \frac{1}{3}t\cos t \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

となる．ただし $C_1'' = C_1' - 2/9$, $C_2'' = C_2' = 2/9$.

この結果は（もちろん）第１の解法の結果と一致する．

（コメント）「いかにも計算したフリ」をしたけれども，実はあまりに面倒だったので計算は数式処理ソフトにやらせた．理論的にはもちろん正しいけれど「とても実行できる計算ではない」ということは納得してもらえると思う．このように「１階行列化して定理 4.3.1 を用いる方法」は,「与えられた方程式を実際に方程式を解く」という意味からすれば，あまり現実的ではない．例題６のように，非斉次項が一般の関数で与えられている場合には仕方ないけれども，この例のように非斉次項が三角関数や指数関数，多項式関数，もしくはそれらの積で与えられている場合には，別の方法で解いた方が，ずっと速い．

さらに別の解き方として（例題６でも触れたように）「ラプラス変換を用いた解法」もあることに注意しておく．

<u>例題９</u>：次の連立微分方程式を解け．

$$
\begin{cases} x_1''(t) = 3x_1(t) + 4x_2(t) - 2 \\ x_2''(t) = -x_1(t) - x_2(t) - 6 \end{cases}
$$

（解説）今度は高階の連立方程式である.「２つの連立方程式からうまくどちらからの未知関数を消去して，未知関数１つの単独方程式に持っていく」という例題７の第２解法で述べたアイデアを用いいれば，同じように解くことが出来る．

（解）与えられた方程式を

$$
\begin{cases} (D^2 - 3)x_1(t) - 4x_2(t) = -2 \\ x_1(t) + (D^2 + 1)x_2(t) = -6 \end{cases}
$$

と書き直す．第１式に (D^2+1) を施し，第２式を４倍して辺々加える：

$$
\begin{aligned}
&(D^2+1)\bigl\{(D^2-3)x_1(t)-4x_2(t)\bigr\}+4\bigl\{x_1(t)+(D^2+1)x_2(t)\bigr\}\\
&\quad=(D^4-2D^2+1)x_1(t)\\
&\quad=(D-1)^2(D+1)^2x_1(t)\\
&\quad=-26.
\end{aligned}
$$

解くべき非斉次方程式 $(D^4-2D^2+1)x_1(t)=-26$ の特殊解として，

$$x_1(t)=-26 \quad \text{（定数関数）}$$

が取れる．ゆえにその一般解は

$$x_1(t)=C_1e^t+C_2te^t+C_3e^{-t}+C_4te^{-t}-26.$$

第１式に代入して

$$
\begin{aligned}
x_2(t)&=\frac{1}{4}\left\{(D^2-3)\bigl(C_1e^t+C_2te^t+C_3e^{-t}+C_4te^{-t}-26\bigr)+2\right\}\\
&=\frac{1}{2}(C_1-C_2-C_1t)e^t-\frac{1}{2}(C_3+C_4+C_3t)e^{-t}+20.
\end{aligned}
$$

問　題　A

[1] 次の微分方程式を解け.

(1) $x' = (t-x)^2$　　(2) $x' = -\dfrac{t^2+x^2}{2tx}$　　(3) $x' = a + \dfrac{x}{t} + \left(\dfrac{x}{t}\right)^2$　(a は定数)

(4) $x' = \dfrac{3t+x-4}{3x-t-2}$　　(5) $x' = \dfrac{4t-6x-1}{2t-3x+2}$　　(6) $tx' = \sqrt{t^2+x^2}$

(7) $\left(t\cos\dfrac{x}{t} + x\sin\dfrac{x}{t}\right)x + \left(t\cos\dfrac{x}{t} - x\sin\dfrac{x}{t}\right)tx' = 0$

(8) $(x + e^t\sin x) + (t + e^t\cos x)x' = 0$

[2] 次の微分方程式が全微分型であるための必要十分条件を求めよ．またそのとき方程式を解け．ただし $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2$ は全て定数である．

$$(a_1t^2 + b_1tx + c_1x^2) + (a_2t^2 + b_2tx + c_2x^2)x' = 0.$$

[3] 次の微分方程式を解け.

(1) $x(x')^2 - (1+tx)x' + t = 0$　　(2) $(x')^2 - x^2 + 2e^tx = e^{2t}$

問　題　B

[1] 次の微分方程式の一般解および実数解を求めよ.

(1) $x'' - 5x' + 6x = 1 + t + e^t$　　(2) $x''' - 3x' - 2x = e^t + e^{-t}$

(3) $x^{(4)} + 2x'' + x = \sin t + \cos 2t$　　(4) $x''' + 6x'' + 11x' + 6x = 2t + e^{-2t}$

(5) $x^{(4)} + x = \cos t + \sin 3t$　　(6) $x''' - 3x'' + 3x' - x = t^2 + e^t$

[2] 次の連立微分方程式を,

(i) 行列の指数関数を用いる方法（講義中の方法）,

(ii) 未知関数を消去して単独の方程式に帰着させる方法（例題７の第２解法）

の両方で解け.

(1) $\begin{cases} x_1'(t) &= 2x_1(t) + 2x_2(t) \\ x_2'(t) &= 3x_1(t) + x_2(t) \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} x_1'(t) &= x_1(t) - x_2(t) \\ x_2'(t) &= x_1(t) + x_2(t) \end{cases}$

(3) $\begin{cases} x_1'(t) &=& x_1(t)+2x_2(t) \\ x_2'(t) &=& x_2(t) \end{cases}$ (4) $\begin{cases} x_1'(t) &=& 3x_1(t)+4x_2(t) \\ x_2'(t) &=& -x_1(t)-x_2(t) \end{cases}$

[3] 次の連立微分方程式を解け.

(1) $\begin{cases} x_1'(t) &=& x_1(t)-x_2(t)+1 \\ x_2'(t) &=& x_1(t)+x_2(t)+1 \end{cases}$ (2) $\begin{cases} x_1'(t) &=& -5x_1(t)-x_2(t)+e^t \\ x_2'(t) &=& x_1(t)-3x_2(t)+e^{2t} \end{cases}$

(3) $\begin{cases} x_1'(t)+x_2'(t)+5x_1(t)+7x_2(t) &=& 2 \\ 2x_1'(t)+3x_2'(t)+x_1(t)+x_2(t) &=& \sin t \end{cases}$

(4) $\begin{cases} x_1''(t)-4x_1'(t)+4x_1(t)-x_2(t) &=& 1 \\ 25x_1(t)-x_2''(t)-4x_2'(t)-4x_2(t) &=& 0 \end{cases}$

(5) $\begin{cases} x_1''(t)-x_2(t) &=& 4\cos t \\ x_2''(t)-x_1(t) &=& 4\sin t \end{cases}$ (6) $\begin{cases} x_1''(t)-3x_2'(t)+4x_1(t) &=& \cos t \\ 3x_1'(t)+x_2''(t)+4x_2(t) &=& t \end{cases}$

(7) $\begin{cases} x_1'''(t)+x_2'''(t)+x_1'(t)+x_2(t) &=& t^2 \\ x_1''(t)+x_2''(t)+x_1(t)+x_2'(t) &=& e^x \end{cases}$

(8) $\begin{cases} x_1''(t)+2x_1(t)+x_2'(t)+x_3'(t) &=& t \\ x_1'(t)+x_2(t) &=& t^2 \\ x_1(t)-x_2'(t)-x_3'(t) &=& t^3 \end{cases}$

(9) $\begin{cases} t^2x_1''(t)+tx_1'(t)+2x_1(t)+tx_2'(t) &=& 1 \\ 2tx_1'(t)+t^2x_2''(t)+tx_2'(t)-x_2(t) &=& t \end{cases}$

問 題 C

[1] 微分方程式

$$t(t-1)x''+(\gamma+(\alpha+\beta+1)t)x'-\alpha\beta x=0$$

を考える．ただし $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}$ で，γ と $\gamma-(\alpha+\beta)$ は整数ではないとする．

(1) $t=0$ における 1 次独立なベキ級数解を 2 つ求めよ．また，求めたベキ級数解の収束半径を求めよ．

(2) $t=1$ における 1 次独立なベキ級数解を 2 つ求めよ．また，求めたベキ級数解の収束半径を求めよ．

[2] 次の微分方程式の一般解を $t=0$ のまわりで求めよ．

$$t(t-1)x''+(4t-2)x'+2x=0.$$