２０１２年度数学IA 夏学期中間試験問題

（６月６日，持ち込み不可）

担当：斉藤　義久

- **各設問ごとの注意事項をよく読み，答案を作成すること．**
- **答案は日本語で作成すること．判読不能の文字や矢印が多用してある答案は日本語と認めない場合がある．**
- **講義中に証明した定理や命題は断りなく用いて良い．また，講義中に説明していない定理や命題を使っても良いが，その場合にはどのような定理を使ったのかを明記し，その定理の主張を正確に書くこと．正確でなければ大幅な減点の対象となる．**

[1] 次の関数の導関数を求めよ（答のみで良い）．

(1) $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$　　(2) e^{1/x^2}　　(3) $\mathrm{Arcsin}(\sqrt{1-x^2})$　　(4) $x^{\mathrm{Arctan}\,x}$

注）「答のみで良い」ということは,「答以外は見ない」という意味である．

[2] 第 n 項が以下のように与えられる数列の極限値を求めよ（$\varepsilon - N$ 論法は，使っても使わなくても良い）．

(1) $\sqrt[n]{a}\ (a>0)$　　(2) $\dfrac{a^n}{n!}$　　(3) $\dfrac{n!}{n^n}$　　(4) $\dfrac{n}{2^n}$

注）「答のみで良い」とは言っていないことに注意せよ．

[3] $f(x)$ は $X=\{x\in\mathbb{R}\mid x\neq a\}$ 上で定義された関数とする（ただし a はある実数）．このとき,『$f(x)$ の $x\to a$ における極限値が存在しない』ことの定義を，$\varepsilon-\delta$ 論法を用いて正確に書け．

注）「正確に書け」との指示に注意せよ．これは「正確でなければ，全て×にする」という意味である．

[4] 数列 $\{a_n\}$ を以下のように与える．

$$a_1 = 1, \qquad a_n = \sqrt{2a_{n-1} + 3} \quad (n = 2, 3, \cdots)$$

このとき，$\lim_{n\to\infty} a_n$ を求めよ．

注）解答には $\varepsilon - N$ 論法を用いること．それ以外の場合は（仮に答えが正しくても）解答と認めない．

[5] 以下の問いに答えよ．

(1) $f(x), g(x)$ を無限回微分可能な関数とするとき，公式

$$\big(f(x)g(x)\big)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} f^{(k)}(x) g^{(n-k)}(x)$$

を示せ．ただし n は正の整数とする．

(2) 以下，$f(x) = \mathrm{Arctan}x$ とする．(1) の公式を用いて，$f^{(n)}(0)$ を求めよ．また，この結果および，$a = 0$ におけるテイラーの定理を使って，$f(x) = \mathrm{Arctan}x$ を

$$\mathrm{Arctan}x = n \text{ 次以下の多項式} + R_{n+1}$$

の形に表示せよ．ただし剰余項 R_{n+1} の具体型は求めなくて良い．

[6] $\mathbb{R}$ 上で定義される関数 $f(x)$ は次を満たすとする．

- $f(x)$ は $\mathbb{R}$ 上連続である．
- 任意の $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ に対し，$f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2)$.

このような条件を満たす $f(x)$ は，$f(x) = ax$ (a は定数) に限ることを証明せよ．

注）求められているのは「概略を書け」ではなく,「証明せよ」ということである．