２０１２年度数学IA 夏学期期末試験問題

９月３日，１０：５５～１２：２５（９０分），持ち込み不可

担当：斉藤　義久

- **各設問ごとの注意事項をよく読み，答案を作成すること．特に『答のみで良い』と明記していない場合は，全て記述式の問題である．記述式の問題に対して何の説明もなしに答しか書いていない場合は，大幅な減点の対象となる．**
- **答案は日本語で作成すること．判読不能の文字や矢印が多用してある答案は日本語と認めない場合がある．**
- **講義中に証明した定理や命題は断りなく用いて良い．また，講義中に説明していない定理や命題を使っても良いが，その場合にはどのような定理を使ったのかを明記し，その定理の主張を正確に書くこと．正確でなければ大幅な減点の対象となる．**

[1] 次の関数の２階の偏導関数を全て求めよ.

(1) $\log(x^2+xy+y^2)$ (2) $\mathrm{Arctan}\dfrac{y}{x}$

注）解答は答のみで良い．ただし，答えは出来る限り簡単な形で書くこと.

[2] 次の極限値を求めよ.

(1) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^3y-xy^3}{x^2+y^2}$ (2) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,2)}\frac{x^2y-2x^2-2xy+4x+y-2}{x^4-4x^3+6x^2+y^2-4x-4y+5}$

[3] ２変数の極座標変換

$$x=r\cos\theta,\quad y=r\sin\theta$$

を考える．このとき２変数のラプラシアン

$$\Delta=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

を極座標系 (r,θ) で表示せよ.

注）この問題は暗記問題ではない．答だけでなく，計算の過程を明示すること.

[4] $f(x,y)=x^3-3xy+2y^2+2x+y$ とする.

(1) $f(x,y)$ は $(x,y)=(-1,1)$ において全微分可能であることを証明せよ.

(2) 曲面 $z=f(x,y)$ の，点 $(-1,1,f(1,1))$ における接平面を求めよ.

[5] 次の関数の極値と，それを与える点を求めよ．ただし，本問において極値とは広義の極値を表すものとする.

(1) $x^3+2xy+y^2+y$ (2) $y^4-3xy^2+2x^2$ (3) $\sin x\sin y\sin(x+y)$

(4) $x^2y^2+2y^2z-x^2-2y^2-z^2-2z$

[6] (1) 『２変数版平均値の定理』はどのような定理か？主張を正確に述べよ.

(2) これを証明せよ.