２０１２年度冬学期・数学IAプリント（その２）

（２０１２年１１月１４日配布）

担当：斉藤　義久

積分計算の実例に関しては，時間の都合で講義中には十分に説明しきれないので，プリントの形で補足したい．高校のときにすでに習っている公式も多いと思うが，まとめの意味も込めて敢えて書くことにした．

また，不定積分の計算で現れる積分定数は，煩わしいので省略してある．

1. 基本公式

まず，いくつかの基本的な関数に対する積分を列挙しよう．これらの多くは高校で習っていることと思う．

• x^n (n は整数) の積分

$$\int x^n dx = \begin{cases} \dfrac{1}{n+1}x^{n+1} & (n \neq -1), \\ \log|x| & (n = -1). \end{cases} \tag{1}$$

• 三角関数の積分

$$\int \sin x dx = -\cos x, \qquad \int \cos x dx = \sin x. \tag{2}$$

• 指数関数・対数関数の積分

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\log a}. \tag{3}$$

$$\int (\log_a x) dx = x\left(\log_a x - \frac{1}{\log a}\right). \tag{4}$$

• 逆三角関数の微分から求まる公式

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \mathrm{Arcsin} x. \tag{5}$$

$$\int \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \mathrm{Arccos} x. \tag{6}$$

$$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \mathrm{Arctan} x. \tag{7}$$

これらの公式はいずれも

「右辺の微分が，左辺の被積分関数（= 左辺の微分）に一致する」

ことを示すことで証明される．

ただ，この方法は右辺の具体形を最初から知っていないと使えない．とはいえ，右辺の具体形が非自明なのは (4) だけだろう．知っている人も多いと思うが，念のた

め (4) の積分を計算する方法を紹介しておこう．これは部分積分の公式を使って計算される：

$$\begin{aligned}\int (\log_a x)dx &= \int (x)'(\log_a x)dx \\ &= x\log_a x - \int x(\log_a x)'dx \\ &= x\log_a x - \frac{1}{\log a}\int dx \\ &= x\left(\log_a x - \frac{1}{\log a}\right).\end{aligned}$$

これらの公式はいずれもそれほど難しいものではないが，これらと部分積分，置換積分を組み合わせることによって，多くの公式を導くことが出来る．例えば次の命題が成り立つ．

命題 1 $g(x)$ を C^1-級関数とすれば，

$$\int \frac{g'(x)}{g(x)}dx = \log|g(x)|.$$

（証明）$f(x) = 1/x$, $\varphi(t) = x$ とする．置換積分の公式より

$$\int \frac{dx}{x} = \int \frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)}dt.$$

一方，

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{x} &= \log|x| \quad (\because (1)) \\ &= \log|\varphi(t)|.\end{aligned}$$

後は文字を書き換えればよい． □

この公式はなかなか有効で，例えばこれにより $\tan x$ の積分が計算できる．

例 2 $\displaystyle\int \tan x dx$ を求めよ．

解）

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = -\frac{\cos' x}{\cos x}$$

であるので，命題 1 を $g(x) = \cos x$ として適用すれば，

$$\int \tan x dx = -\log|\cos x|. \tag{8}$$

□

後で用いる重要な公式を２つ紹介しておこう．

例 3

$$\int \frac{1}{x^2+a^2}dx = \frac{1}{a}\mathrm{Arctan}\frac{x}{a}. \tag{9}$$

解）両辺を微分しても良いが，ここでは「左辺の積分を計算する」という立場でやってみたい．$f(x) = \dfrac{1}{x^2+a^2}$, $\varphi(t) = at$ とおくと，

$$\begin{aligned}(\text{左辺}) &= \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = \int \frac{a}{a^2t^2+a^2}dt = \frac{1}{a}\int \frac{dt}{t^2+1} = \frac{1}{a}\mathrm{Arctan}t \\ &= (\text{右辺}).\end{aligned}$$

□

例4

$$\int \frac{x}{x^2+a^2}dx = \frac{1}{2}\log(x^2+a^2). \tag{10}$$

解）先の例同様，左辺の積分を計算する．$f(x) = x^2 + a^2$ とおくと，

$$f'(x) = 2x.$$

よって

$$\begin{aligned}(\text{左辺}) &= \frac{1}{2}\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \frac{1}{2}\log|f(x)| \quad (\because \text{命題 }1\,) \\ &= (\text{右辺}).\end{aligned}$$

□

2. 有理関数の積分に関する補足

有理関数 $P(x)/Q(x)$ の積分については，計算の処方箋は講義中に説明したので，ここでは繰り返さない．一番重要なのは

$P(x)/Q(x)$ を部分分数に分解せよ

という部分だったことだけ，思い出しておこう．ここで，部分分数分解とは，分子の多項式 $Q(x)$ を因数分解して，もとの有理式 $P(x)/Q(x)$ を，$Q(x)$ の各因子を分母とする有理式の和で書き直すことである．

したがって，まず最初のステップは

『分母の多項式 $Q(x)$ を因数分解せよ』

ということになる．これについては，次が知られている．

定理５ 実数係数の多項式は，必ず（実係数の）２次以下の多項式の積に因数分解できる．

この定理は非自明であるが，ここでは証明せず認めて先に進むことにする[1]．

[1]講義では Fact として紹介した．証明には “体の理論” の知識が必要となる．本学では，これは数学科の３年時（６学期）に学ぶことになっている内容で，おそらく数学科以外では学ぶことはないと思う．興味のあるものは「代数学」に関する教科書（図書館で探せばたくさんあるはず）の「ガロア理論」が出ている辺りを探してみるといいだろう．キーワードは「代数学の基本定理」と「$\mathbb{C}$ は $\mathbb{R}$ の２次拡大である」という事実である．この定理は後でもう一度触れる．

まず $Q(x)$ の最高次の係数は1と仮定しても一般性を失わないことに注意しよう．このとき $Q(x)$ が2次以下の多項式の積に因数分解出来るということを式で書けば次のようになる：

$$Q(x) = \left(\prod_{i=1}^{k}(x-a_i)^{m_i}\right)\left(\prod_{j=1}^{l}(x^2+b_jx+c_j)^{n_j}\right). \tag{$\sharp$}$$

ただし，

$$\prod_{i=1}^{k}(x-a_i)^{m_i} = (x-a_1)^{m_1}\times(x-a_2)^{m_2}\times\cdots\times(x-a_k)^{m_k}$$

とする．つまり $\prod$ は，総和の記号 $\sum$ の掛け算版である．したがって，上の $Q(x)$ の次数 N は

$$\begin{aligned} N &= m_1+m_2+\cdots+m_k+2(n_1+n_2+\cdots+n_l) \\ &= \sum_{i=1}^{k} m_i + 2\sum_{j=1}^{l} n_j \end{aligned}$$

とうことになる．

ここに現れた2次式

$$x^2+b_jx+c_j$$

は，これ以上因数分解出来ない2次式だから

$$b_j^2-4c_j<0$$

である[2]．ゆえに

$$x^2+b_jx+c_j = \left(x+\frac{b_j}{2}\right)^2+\frac{4c_j-b_j^2}{4}$$

と変形したとき，右辺の第2項は正である．

$$\alpha_j = -\frac{b_j}{2}, \qquad \beta_j = \frac{\sqrt{4c_j-b_j^2}}{2}$$

とすれば，($\sharp$) は

$$Q(x) = \left(\prod_{i=1}^{k}(x-a_i)^{m_i}\right)\left(\prod_{j=1}^{l}\left((x-\alpha_j)^2+\beta_j^2\right)^{n_j}\right) \tag{$\sharp\sharp$}$$

と書き直せる．

[2]もし $D=b_j^2-4c_j\geq 0$ であれば，方程式 $x^2+b_jx+c_j=0$ は（重根の場合も込めて）2つの実数解 λ_1,λ_2 をもつ．これは2次式 $x^2+b_jx+c_j$ が

$$x^2+b_jx+c_j=(x-\lambda_1)(x-\lambda_2)$$

と因数分解できることに他ならないから，矛盾．

以上の記法の下に，$P(x)/Q(x)$ の部分分数分解は次のように与えられる．

命題６

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \sum_{i=1}^{k}\sum_{p=1}^{m_i}\frac{c_{i,p}}{(x-a_i)^p} + \sum_{j=1}^{l}\sum_{q=1}^{n_j}\frac{\gamma_{j,q}x+\delta_{j,q}}{\left((x-\alpha_j)^2+\beta_j^2\right)^q}.$$

ただし，$c_{i,p}, \gamma_{j,q}, \delta_{j,q}$ は全て実数である．

証明は難しくないが，長くなるので省略する[3]．この命題から，有理関数の積分の計算は次の積分を計算することに帰着されることがわかる：

$$\int \frac{dx}{(x-a)^n}, \qquad \int \frac{xdx}{(x^2+\beta^2)^n}, \qquad \int \frac{xdx}{(x^2+\beta^2)^n}.$$

補題７

(1)
$$\int \frac{dx}{(x-a)^n} = \begin{cases} \dfrac{-1}{n-1}\dfrac{1}{(x-a)^{n-1}} & (n>1), \\ \log|x-a| & (n=1). \end{cases}$$

(2)
$$\int \frac{xdx}{(x^2+\beta)^n} = \begin{cases} \dfrac{-1}{2(n-1)}\dfrac{1}{(x^2+\beta^2)^{n-1}} & (n>1), \\ \log|x-a| & (n=1). \end{cases}$$

(3) $I_n = \displaystyle\int \frac{xdx}{(x^2+\beta)^n}$ とおくとき，I_n は次の漸化式によって定まる：

$$I_n = \begin{cases} \dfrac{1}{\beta}\mathrm{Arctan}\dfrac{x}{\beta} & (n=1), \\ \dfrac{1}{\beta^2}\left(\dfrac{x}{(2n-2)(x^2+\beta^2)^{n-1}} + \dfrac{2n-3}{2n-2}I_{n-1}\right) & (n>1). \end{cases}$$

（証明）(1) はこのプリントの１ページの公式 (1) から簡単に示せる．(2) は $x^2=t$ と置けば (1) に帰着される．(3) の $n=1$ の場合はすでにやった．一般の場合は部分積分を使って示される．□

以上から，次の定理が得られる：

定理８ 有理関数の原始関数は，有理関数と対数関数および逆正接関数で表される．

[3]証明を知りたい場合は，例えば，杉浦光夫「解析入門 I」（東京大学出版会），命題 6.1 (p.241) を参照．

3. 具体例

講義中にも繰り返し述べたように，積分の計算に処方箋はないので，多くの具体例に触れることによって “感をやしなう” 以外に上達の道はない．時間的な制約もあり，講義中には多くの例を紹介することが出来ないので，プリントの形で補足する．

例９ 次の積分を求めよ．

$$\int \frac{1}{x^4+1}dx$$

これは有理式の積分だから，部分分数分解によって積分計算が出来るはずである．一見すると分母の x^4+1 はこれ以上因数分解出来ないようにも見えるが，よく考えると

$$x^4+1=(x^2-\sqrt{2}x+1)(x^2+\sqrt{2}x+1) \tag{11}$$

と因数分解できることがわかる（実は一番難しいのはこの部分！）．

結果がわかってしまえば何てことはないが，自分でこの因数分解に気づくのはなかなか難しいかも知れない．『どうしてこんな因数分解に気づくのか？』について補足しておこう．基本になるのは，次の定理である．

定理１０（代数学の基本定理） 複素係数の 1 変数多項式は，（複素数の範囲で）必ず 1 次式の積に分解できる．すなわち，$Q(x)$ を複素係数の 1 変数 N 次多項式とすれば，

$$Q(x)=\alpha\prod_{j=1}^{N}(x-\beta_j) \quad (\alpha,\beta_j\in\mathbb{C}) \tag{12}$$

と書くことが出来る．ただし $\mathbb{C}$ は複素数の全体を表す．

α は $Q(x)$ の最高次の係数であるが，これは 1 としてしまっても一般性は失わないので，以後 $\alpha=1$ と仮定する．ところで，(12) 式は，

『n 次方程式 $Q(x)=0$ の解が $x=\beta_j$ $(j=1,2,\cdots,N)$ である』

ということに他ならない[4]．すなわち，代数学の基本定理は，

『複素数まで範囲を広げれば，N 次方程式 $Q(x)=0$ は，必ず N 個の解を持つ』

と主張しているわけである．

我々が問題にしているのは $Q(x)$ が実係数の 1 変数多項式の場合だが，実数も複素数の一種だから，もちろんこの定理を適用することが出来る．$Q(x)=x^4+1$ の場合に，問題を考察してみよう．

考えなければならないのは，$x^4+1=0$ という 4 次方程式である．もちろん，

$$x^4+1=0 \quad \Leftrightarrow \quad x^4=-1$$

だから，後者を解けば良い．$x^2=-1$ なら $x=\pm i$ であり，これは知らない人はいないと思う．「4 乗したら -1 になる数」というのは，「2 乗したら i ないし $-i$ になる数」だから，

$$x^2=i \quad と \quad x^2=-i$$

[4] β_j たちは等しいものがあっても良いので，重根を許していることに注意．

を解けばよく，答えは

$$x = \frac{1+i}{\sqrt{2}},\ -\frac{1+i}{\sqrt{2}},\ \frac{1-i}{\sqrt{2}},\ -\frac{1-i}{\sqrt{2}}$$

である（最初の２つが $x^2 = i$ の解，後の２つが $x^2 = -i$ の解）．したがって x^4+1 の因数分解は

$$x^4+1 = \left(x - \frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)\left(x + \frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)\left(x - \frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)\left(x + \frac{1-i}{\sqrt{2}}\right) \tag{13}$$

となる．

ここで,「１つめと３つめ」,「２つめと４つめ」というペアに着目しよう．高校で『共役な複素数』という概念を習ったことと思うが，念のために定義を述べておく．

定義 複素数 $\alpha = a+bi$ $(a, b \in \mathbb{R})$ に対し，$\overline{\alpha} = a - bi$ とし，これを α に共役な複素数と（α の複素共役）と呼ぶ．

話を $x^4+1=0$ の場合に戻そう．よく見ると「１つめと３つめ」,「２つめと４つめ」というペアは，互いに複素共役になっている：

$$\overline{\frac{1+i}{\sqrt{2}}} = \frac{1-i}{\sqrt{2}}, \quad \overline{-\frac{1+i}{\sqrt{2}}} = -\frac{1-i}{\sqrt{2}}.$$

つまり，$\alpha = \dfrac{1+i}{\sqrt{2}}$，$\beta = -\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}$ とおくとき，x^4+1 の因数分解は，

$$x^4+1 = (x-\alpha)(x-\overline{\alpha})(x-\beta)(x-\overline{\beta}) \tag{14}$$

となっているのである．これは，単に (13) 式の積の順番を入れ替えただけなのだが，このことには大きな意味がある．実際，

$$(x-\alpha)(x-\overline{\alpha}) = x^2 - (\alpha+\overline{\alpha})x + \alpha\overline{\alpha}$$

であるが，$\alpha = a+bi$ $(a, b \in \mathbb{R})$ と書くことにすれば，

$$\alpha + \overline{\alpha} = 2a, \quad \alpha\overline{\alpha} = a^2 + b^2$$

だから，

$$(x-\alpha)(x-\overline{\alpha}) = x^2 - 2ax + (a^2+b^2)$$

となり，右辺は実係数の２次式である．また，この２次式は，実数の範囲ではこれ以上因数分解することは出来ない．

すでにお気づきのことと思うが，(11) の因数分解を得る “カラクリ” は，このようなプロセスに依るのである：

$$\alpha = \frac{1+i}{\sqrt{2}}\text{のとき：}a = \frac{1}{\sqrt{2}},\ b = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \Rightarrow \quad 2a = \sqrt{2},\ a^2+b^2 = 1,$$

$$\beta = -\frac{1+i}{\sqrt{2}}\text{のとき：}a = -\frac{1}{\sqrt{2}},\ b = -\frac{1}{\sqrt{2}} \quad \Rightarrow \quad 2a = -\sqrt{2},\ a^2+b^2 = 1.$$

したがって，(11) 式

$$x^4+1 = (x^2 - \sqrt{2}x + 1)(x^2 + \sqrt{2}x + 1)$$

が得られる．

実は，これは x^4+1 の特殊性に依存する話ではなく，次が成り立つ．

定理１１（実多項式版代数学の基本定理） $Q(x)$ を最高次の係数が 1 であるような実係数の 1 変数多項式とするとき，$Q(x)$ は（複素数の範囲で）は以下のように 1 次式の積に因数分解される：

$$Q(x)=\prod_{i=1}^{k}(x-a_i)\times\prod_{j=1}^{l}\big((x-\beta_j)(x-\overline{\beta}_j)\big). \tag{15}$$

ただし $a_i\in\mathbb{R}$．また β_j は実数ではない複素数．

すなわち，実数係数の場合，$Q(x)=0$ の解というのは，複素数の解は，その共役と必ずペアになって現れるのである[5]．すでに説明したように，右辺の第２項に現れる２次式は，実数の範囲ではこれ以上因数分解出来ない．したがって次の系を得る：

系１２（定理４の再掲） 実係数の 1 変数多項式は，(実数の範囲で）必ず 1 次式と 2 次式の積に因数分解出来る．

前出の $(\sharp)$ と (15) では少し形が違うが，両者の関係は以下の通り．まず $b_j=-(\beta_j+\overline{\beta}_j)$，$c_j=\beta_j\overline{\beta}_j$ とおいて，(15) 式の右辺の第２項を実係数の２次式に書き直す．これを重複度を加味した形で書けば，$(\sharp)$ を得る．

ずいぶん長くなってしまったが，話を積分の計算に戻そう．(11) の因数分解を用いると，部分分数分解が得られる．これをさらに整理して，

$$\begin{aligned}\frac{1}{x^4+1}&=\frac{x+\sqrt{2}}{2\sqrt{2}(x^2+\sqrt{2}x+1)}-\frac{x-\sqrt{2}}{2\sqrt{2}(x^2-\sqrt{2}x+1)}\\&=\frac{(x^2+\sqrt{2}x+1)'+\sqrt{2}}{4\sqrt{2}(x^2+\sqrt{2}x+1)}-\frac{(x^2-\sqrt{2}x+1)'-\sqrt{2}}{4\sqrt{2}(x^2-\sqrt{2}x+1)}.\end{aligned}$$

したがって，

$$\begin{aligned}\int\frac{dx}{x^4+1}&=\frac{1}{4\sqrt{2}}\log(x^2+\sqrt{2}x+1)+\frac{1}{4}\int\frac{dx}{\left(x+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\frac{1}{2}}\\&\quad-\frac{1}{4\sqrt{2}}\log(x^2-\sqrt{2}x+1)+\frac{1}{4}\int\frac{dx}{\left(x-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\frac{1}{2}}\\&=\frac{1}{4\sqrt{2}}\log\left(\frac{x^2+\sqrt{2}x+1}{x^2-\sqrt{2}x+1}\right)+\frac{1}{4}\int\frac{dt}{t^2+\frac{1}{2}}+\frac{1}{4}\int\frac{du}{u^2+\frac{1}{2}}\qquad\left(\begin{array}{l}t=x+\frac{\sqrt{2}}{2}\\u=x-\frac{\sqrt{2}}{2}\end{array}\right)\\&=\frac{1}{4\sqrt{2}}\log\left(\frac{x^2+\sqrt{2}x+1}{x^2-\sqrt{2}x+1}\right)+\frac{\sqrt{2}}{4}\Big\{\mathrm{Arctan}(\sqrt{2}x+1)+\mathrm{Arctan}(\sqrt{2}x-1)\Big\}.\end{aligned}$$

---

[5]仰々しく言うと，これは『$\mathbb{C}$ は $\mathbb{R}$ の２次拡大である』という一言に集約される．事情を知りたい場合には，この単語をキーワードに調べてみると良いだろう．

Remark. ここまで計算結果が複雑だと『本当にあってるのか？』が不安になる．ところが，原始関数の問題に関しては，右辺を微分することで，答があっているかどうかを簡単にチェック出来る．これは結構有効なので，覚えてくと良い．

コメント） このように，被積分関数の形が比較的簡単であっても，積分の最終形は非常に複雑になり得る．これが積分の難しいところでもあるし，同時に面白いところでもある．また，この例を通じて，このタイプの計算で一番難しいところは，実は

『分子の $Q(x)$ の因数分解をするところ』＝『方程式 $Q(x)=0$ と解くところ』

であることが，納得してもらえたと思う．

この点に関して，さらに付け加えるべきことがある．今の場合，解くべき方程式は

$$x^4+1=0$$

であり，幸いにもその解を求めることが出来た．しかし，一般には $Q(x)$ は N 次多項式であり，N 次方程式 $Q(x)=0$ を解くのはものすごく難しい．代数学の基本定理は，単に『N 個の解の存在を保証してくれる』だけであり，その解の具体形については何も教えてくれない．『積分を具体的に計算したい』という目的からすれば，解が具体的に求められないと仕方ないので，ここは "じっと眺めて，頑張る" 以外に方法がないのである[6]．

演習問題 x^6+1 を実数の範囲で因数分解せよ．また，x^7+1 ではどうか？さらに一般化して，x^N+1 だとどうなるか[7]？

例１３ 次の積分を求めよ．

$$\int \sqrt{x^2+a}dx \quad (a>0).$$

これは，講義の例 4.5.3 で扱った積分である．すでに答えは知っているが，これを講義とは別の方法で計算してみよう．

求める積分を I としよう．$a=k^2$ とすれば，これは講義で説明した，『(C) ２次無理式の有理関数の積分』の，(iii) の場合にあたる．すなわち

$$x=k\tan\theta$$

として，

$$I=\int \frac{k}{\cos\theta}\cdot\frac{k}{\cos^2\theta}d\theta = a\int\frac{d\theta}{\cos^3\theta}.$$

---

[6] ２次方程式の解の公式を知らない人はいないと思うが，実は３次と４次でも解の公式が存在する．５次以上になると，話はさらに複雑になる．数学好きの学生さんの中には，『５次以上の方程式には解の公式が存在しない』という話を聞いたことがある人もいるだろう．これは 19 世紀の初めにアーベル（Abel）やガロア（Galois）らによって証明された有名な結果であるが，正確には『５次以上の方程式には，"代数的な" 解の公式が存在しない』ということであって，公式が存在しないわけではない．ここで，"代数的" という意味は，与えられた方程式の係数を使って，解をそれらの和，差，積，商，および根号の組合わせで書く，という意味である．実際，例えば５次方程式の場合には，"楕円関数" や "超幾何級数" など（数学 IA の範囲を超える内容！）を使うと，解の一般形を求めることが出来る．５次を越えた場合にもいろいろ結果はあるようだが，完全に一般的な形で『N 次方程式の解の公式』が知られているかどうかは，筆者は知らない．

[7] もし『複素平面』を知っているなら，答えは出せると思う．N が一般の場合の解の記述には三角関数が必要で，『代数的に解けない』ということの，"感じ" はわかってもらえるかも知れない．

今度はこの積分を有理関数の積分に直す．

$$\theta = 2\mathrm{Arctan\ t} \quad \left(\Leftrightarrow\ t = \tan\frac{\theta}{2}\right)$$

として，

$$a\int\frac{d\theta}{\cos^3\theta} = a\int\left(\frac{1+t^2}{1-t^2}\right)^3\cdot\frac{2}{1+t^2}dt = 2a\int\frac{(1+t^2)^2}{(1-t^2)^3}dt.$$

被積分関数の分母が

$$(1-t^2)^3 = (1+t)^3(1-t)^3$$

と因数分解できることに注意して，被積分関数を部分分数分解すると

$$\frac{(1+t^2)^2}{(1-t^2)^3} = \frac{1}{2(t+1)^3} - \frac{1}{2(t-1)^3} - \frac{1}{4(t+1)^2} - \frac{1}{4(t-1)^2} + \frac{1}{4(t+1)} - \frac{1}{4(t-1)}.$$

したがって

$$\begin{aligned} I &= 2a\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{-1}{2(t+1)^2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{-1}{2(t-1)^2} - \frac{1}{4}\cdot\frac{-1}{t+1} - \frac{1}{4}\cdot\frac{-1}{t-1}\right. \\ &\qquad\qquad \left. + \frac{1}{4}\cdot\log|t+1| - \frac{1}{4}\cdot\log|t-1|\right) \\ &= a\frac{t(t^2+1)}{(t^2-1)^2} + \frac{a}{2}\log\left|\frac{t+1}{t-1}\right|. \end{aligned}$$

あとはこれを x の関数の形に直せばよい．まず第 1 項を考えよう．

$$\begin{aligned} (\text{第 1 項}) &= \frac{a}{2}\cdot\left(\frac{1+t^2}{1-t^2}\right)^2\cdot\frac{2t}{1+t^2} = \frac{1}{2}\cdot k\tan\theta\cdot\frac{k}{\cos\theta} \\ &= \frac{x\sqrt{x^2+a}}{2} \qquad \left(\because\ \frac{k}{\cos\theta} = \sqrt{k^2\tan^2\theta + k^2} = \sqrt{x^2+a}\right). \end{aligned}$$

次に第 2 項．まず絶対値の中身だけ考えよう．

$$\begin{aligned} \frac{t+1}{t-1} &= \frac{\tan\frac{\theta}{2}+1}{\tan\frac{\theta}{2}-1} = \frac{\sin\frac{\theta}{2}+\cos\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}-\cos\frac{\theta}{2}} = \frac{\left(\sin\frac{\theta}{2}+\cos\frac{\theta}{2}\right)^2}{\sin^2\frac{\theta}{2}-\cos^2\frac{\theta}{2}} = \frac{2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}+1}{-cos\theta} = -\frac{1+\sin\theta}{\cos\theta} \\ &= -\left(\frac{1}{\cos\theta}+\tan\theta\right). \end{aligned}$$

いま考えているのは原始関数の計算だから，適当な定数を足しても構わない．そこで第 2 項に新たに定数 $\frac{a}{2}\log k$ を足す．こうするときれいに x の関数で書ける．

$$\frac{a}{2}\log\left|\frac{t+1}{t-1}\right| + \frac{a}{2}\log k = \frac{a}{2}\log\left|k\left(\frac{1}{\cos\theta}+\tan\theta\right)\right| = \frac{a}{2}\log|\sqrt{x^2+a}+x|.$$

x の符号にかかわらず，$\sqrt{x^2+a}+x$ は常に正の値をとるので，以上併せて

$$\int\sqrt{x^2+a}dx = \frac{x\sqrt{x^2+a}}{2} + \frac{a}{2}\log(\sqrt{x^2+a}+x).$$

もちろん，講義の例 4.5.3 でやった計算結果と一致する．

4. 積分計算に関する演習問題

注意） 問 [2] の中にはまだ講義中に説明していない積分（広義積分）も含まれているが，中間試験までには解説する．また，中間試験では積分の計算問題を出題する予定だが，今回の演習問題の中から出題する場合もあるので，よく復習しておくこと．

- 以下において n, m は正の整数を、α, β は実数を表すものとする．

[1] 次の不定積分を求めよ．

(1) $\displaystyle\int \frac{1-\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}}dx$ (2) $\displaystyle\int \frac{x^3}{x^8+1}dx$ (3) $\displaystyle\int \frac{1}{(e^x+e^{-x})^4}dx$

(4) $\displaystyle\int \frac{e^{4x}}{e^{2x}-1}dx$ (5) $\displaystyle\int x\log(x^2+1)dx$ (6) $\displaystyle\int \frac{x^2+x+1}{(x-1)^2(x-2)}dx$

(7) $\displaystyle\int \frac{dx}{(x-1)^2(x^2+1)^2}$ (8) $\displaystyle\int \frac{dx}{(x^2+4)(x^2+9)}$ (9) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^3-1}$

(10) $\displaystyle\int x^2e^xdx$ (11) $\displaystyle\int x^2\cos x dx$ (12) $\displaystyle\int e^{\alpha x}\sin\beta x dx\ (\alpha,\beta\neq 0)$

(13) $\displaystyle\int \sin^n x\cos x dx$ (14) $\displaystyle\int \tan^n x dx$ (15) $\displaystyle\int (x^2+1)^n x dx$

(16) $\displaystyle\int x^n\sin x dx$ (17) $\displaystyle\int \cos^n x dx$ (18) $\displaystyle\int (\log x)^n dx$

(19) $\displaystyle\int \frac{1}{(x^2+\alpha^2)^n}dx\ (\alpha\neq 0)$ (20) $\displaystyle\int \frac{1}{(x-\alpha)^m(x-\beta)^n}dx\ (\alpha\neq\beta)$

(21) $\displaystyle\int \frac{1}{x^{2m-1}(x^2+a)^n}dx$ (22) $\displaystyle\int \frac{\cos^2 x}{\sin^4 x}dx$ (23) $\displaystyle\int \frac{2-\sin x}{2+\cos x}dx$

(24) $\displaystyle\int \frac{1}{3+5\sin x}dx$ (25) $\displaystyle\int \frac{1}{2+\tan^2 x}dx$ (26) $\displaystyle\int \frac{1}{\cos^3 x}dx$

(27) $\displaystyle\int \frac{1+\cos x}{1+\sin x}dx$ (28) $\displaystyle\int \frac{1}{x}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}dx$ (29) $\displaystyle\int (1-x^2)^{-5/2}dx$

(30) $\displaystyle\int (x+\sqrt{x^2+1})^n dx\ (n\geq 2)$ (31) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x^2-1}}{x^4}dx\ (x>1)$

(32) $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$ (33) $\displaystyle\int \frac{x^2}{(1-x^2)^{3/2}}dx$ (34) $\displaystyle\int \frac{x+1}{(x^2+4)\sqrt{x^2+9}}dx$

(35) $\displaystyle\int \frac{dx}{(x+2)\sqrt{x^2+x+1}}$ (36) $\displaystyle\int \frac{x+1}{\sqrt{x^2+x+1}}dx$ (37) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^{1/2}+x^{1/3}}$

(38) $\displaystyle\int \frac{x^2}{(x\sin x+\cos x)^2}dx$ (39) $\displaystyle\int \frac{1}{x\sqrt{1+x^n}}dx$ (40) $\displaystyle\int \frac{e^x(x^2+1)}{(x+1)^2}dx$

[2] 次の定積分の値を求めよ（広義積分になっていることもある）.

(1) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \sin mx \sin nx dx$ (2) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \sin mx \cos nx dx$ (3) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \cos mx \cos nx dx$

(4) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^n x dx$ (5) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos^n x dx$ (6) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{dx}{a^2\sin^2 x + b^2\cos^2 x}$ $(a, b > 0)$

(7) $\displaystyle\int_0^{\infty} x^n e^{-x} dx$ (8) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{x}{1+\cos x} dx$ (9) $\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-x}\cos^2 x dx$

(10) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1-x^2}} dx$ (11) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\log x}{1+x^2} dx$ (12) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^n}$

(13) $\displaystyle\int_0^1 x^2 \mathrm{Arcsin} x dx$ (14) $\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-ax}\cos bx dx$ $(a, b > 0)$ (15) $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\sin nx}{\sin x} dx$

(16) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\log(1+x)}{1+x^2} dx$ (17) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\log x}{\sqrt{1-x^2}} dx$ (18) $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{dx}{1+a\cos x} dx$ $(|a| < 1)$

(19) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x \mathrm{Arcsin} x}{\sqrt{1-x^2}} dx$ (20) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{e^{ax}+e^{-ax}}$ $(a > 0)$ (21) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \log(\sin x) dx$

(22) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin x \log(\sin x) dx$ (23) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{Arcsin} x}{x} dx$ (24) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx$

(25) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx$