２０１２年度数学IA補足プリント（その１）

（４月１８日配布）

担当：斉藤　義久

１回目の講義，および演習の終了後に何人かの学生さんからアルキメデスの公理（公理I）と連続性の公理（公理II）に関する質問を受けた．その内容は，概ね『これらの公理は当たり前のことではないのか？』といった質問と言っていいと思う．平たく言えば「当たり前すぎて，何が問題になっているのか，わからない」ということだろう．

この問題は『実数とは何か？』，あるいは『実数をどう定義しているのか？』という，ある種根源的な問いに関わってくる話である．数学IAの講義である以上，本来ならこうした問題にちきんとした解答を与えるべきなのだが，時間的な制約もあり講義内で詳しく述べることが出来ないので，プリントの形で補うこととしたい．

以下の性質を持つ集合 X を考える．

I：四則演算に関する性質

(1) X の２元 x, y に対して，“x と y の和” と呼ばれる新しい X の元 $x+y$ が定まり，次を満たす．

(i) 任意の x, y, z に対して，

$$(x+y)+z = x+(y+z).$$

(ii) 零元と呼ばれる元（これを 0_X と書く）が存在して，任意の x に対して，

$$x+0_X = 0_X+x = x.$$

(iii) 任意の x に対して,（和に関する）逆元と呼ばれる元（これを $-x$ と書く）が存在して，

$$x+(-x) = (-x)+x = 0.$$

ここに 0 は (ii) に現れた零元である．

(iv) 任意の x, y に対して，

$$x+y = y+x$$

(2) X の２元 x, y に対して，“x と y の積” と呼ばれる新しい X の元 $x \cdot y$ が定まり，次を満たす．

(i) 任意の x, y, z に対して，

$$(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z).$$

(ii) 単位元と呼ばれる元（これを 1_X と書く）が存在して，任意の x に対して，

$$x \cdot 1_X = 1_X \cdot x = x.$$

(iii) 零元でない任意の $x \in X$ に対して,（積に関する）逆元と呼ばれる元（これを $\dfrac{1_X}{x}$ と書く）が存在して，

$$a \cdot \frac{1_X}{x} = \frac{1_X}{x} \cdot a = 1_X.$$

ここに 1 は (ii) に現れた単位元である．

(iv) 任意の x, y に対して，

$$x \cdot y = y \cdot x.$$

(3) 任意の x, y, z に対して，次が成り立つ．

$$(x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z.$$

以後，記号の簡略化のため，$x \cdot y$ を xy と書く．

II：順序に関する性質

(1) 任意の x, y に対して，

$$x < y, \quad x = y, \quad x > y$$

のうち，どれか 1 つだけが必ず成り立つ．また,「$x < y$ または $x = y$」のとき，$x \leq y$ と書く．また $x \geq y$ も同様．$x > 0_X$ のとき「x は正」，$y < 0_X$ のとき「y は負」という．

(2) $x \leq y$, $y \leq z$ ならば，$x \leq z$ である．

(3) 和および積と順序の関係は以下の通り．

(i) $x \leq y \quad \Rightarrow \quad x + z \leq y + z.$

(ii) $x \leq y$ かつ $z \geq 0 \quad \Rightarrow \quad xz \geq yz.$

III：連続性に関する性質

X の空でない部分集合 A, B は次を満たすとする．

(a) $A \cup B = X$ かつ $A \cap B = \phi.$

(b) $x \in A$ および $y \in B$ を任意にとる．このとき $x < y$.

このとき，対 (A, B) を X の切断という．

X の任意の切断 (A, B) に対し，ある $z \in X$ が存在して，全ての $x \in A$ に対して $x \leq z$ であり，全ての $y \in B$ に対して $y \geq z$ である．さらに，このような $z \in X$ は，与えられた切断 (A, B) に対して一意的に定まる．

注

• I の (1)〜(3) を満たす X を体 (field) と呼ぶ．定義では零元や単位元については，その存在しか仮定されていないが，X が体であれば零元や単位元は一意的であることが証明出来る．

• ここに現れる "和" $+$ や "積" $\cdot$ というのは，抽象的に与えられた集合 X の上に定まっている演算であって，実数の和や積とは全く関係ない（X が実数の集合であるとは，言っていない！）．したがって，例えば

$$x + y = y + x$$

なる性質も，いちいち仮定しないといけない．

• I と II を同時に満たすような X は順序体と呼ばれる．ここでも X は実数の全体とは限らないので，$x < y$ が『数として x より y が大きい』ということを意味している訳ではない．あくまで，"単なる記号であって，上に述べた性質を満たすもの" というだけである．

このとき，次が成り立つ．

定理１．上の I,II,III を満たす X は同型を除いて一意的である．

この主張は「同型とは何か？」を定義しないと意味がない．その正確な意味を述べよう．

定義２．X と Y は順序体（I,II を満たす集合）とする．以下が満たされるとき X と Y は**同型**であるという．

(1) X から Y への全単射 $\varphi : X \to Y$ が存在する．

(2) φ の逆写像を $\psi = \varphi^{-1}$ と書く．このとき，φ および ψ は四則演算と両立する．すなわち，

$$\varphi(1_X) = 1_Y, \quad \varphi(0_X) = 0_Y.$$

$$\varphi(x_1 + x_2) = \varphi(x_1) + \varphi(x_2), \quad \varphi(x_1 x_2) = \varphi(x_1)\varphi(x_2) \qquad (x_1, x_2 \in X).$$

$$\psi(1_Y) = 1_X, \quad \psi(0_Y) = 0_X.$$

$$\psi(y_1 + y_2) = \psi(y_1) + \psi(y_2), \quad \psi(y_1 y_2) = \psi(y_1)\psi(y_2) \qquad (y_1, y_2 \in Y).$$

(3) φ および ψ は順序を保存する．すなわち，

$$x_1 < x_2 \ (x_1, x_2 \in X) \quad \Rightarrow \quad \varphi(x_1) < \varphi(x_2).$$

$$y_1 < y_2 \ (y_1, y_2 \in Y) \quad \Rightarrow \quad \psi(y_1) < \psi(y_2).$$

この定義に基づいて，上の定理１を正確に述べ直すと次のようになる．

定理１'．上記 III を満たす順序体は同型を除いて一意的である．

２つの順序体が同型であるということは，全単射を通じて２つの順序体を同一視しても良い，ということを意味する．したがって，定理１の意味するところは

上の性質を持つ X は，本質的に１つしかない

ということに他ならない.「同型を除いて」というのは数学でしばしば見られる言い回しなのだが，慣れないとかえってわかりにくいと思うので，今はこの程度に理解してもらえればよい．

さて，これでようやく実数を定義する準備が整った．

定義３．上の I,II,III を満たす集合 X を $\mathbb{R}$ と書き，その元（要素）を**実数**と呼ぶ．また，I,II,III を**実数の公理**と呼ぶ．

テキストの一番最初に述べられている

『加減乗除や大小関係に関する数の性質は既知とする』

というのは，正確には

『$\mathbb{R}$ が順序体であることは既知のものとして，断り無く仮定する』

ということを意味している．もちろん "和"，"積"，"大小関係" は，それぞれ通常の意味での和，積，大小関係である．

ここに述べた実数の公理は，講義中に述べた公理 I（アルキメデスの公理），公理 II（実数の連続性，はさみうちの原理）とは明らかに異なっている．以下に両者の関係を説明しよう．

上に述べた抽象的な定義では，確かに $\mathbb{R}$ は定義されているかもしれないが，これでは "自然数" や "整数" をどう定義したらいいのかわからなくなってしまう．そこで，今後は

有理数は既知とする[1]

との仮定をおく．すなわち，有理数に対する和や積，あるいは順序などは既存のものとして，そこにはタッチしない，という意味である．言い換えれば『有理数の全体を $\mathbb{Q}$ とするとき，これが順序体であることは証明せずに認めましょう』と

[1] このことの意味は最後にもう一度触れる．

いうことである．また，有理数を知っているということは，同時に自然数や整数も知っているもの，とみなしていることに注意しよう．

さて，$\mathbb{Q}$ に対して切断 (A,B) を考えたとき，性質 III は必ずしも成り立たないことに注意しよう．実際，

$$B=\{x\in\mathbb{Q}\mid x>0 \text{ かつ } x^2>2\},\quad A=\{x\in\mathbb{Q}\mid x\notin B\}$$

とすれば，確かにこれは切断の定義を満たすけれども，

$$x\leq z\leq y\quad(x\in A,\ y\in B)$$

を満たす z は $\sqrt{2}$ であり，これは有理数ではない[2]．

有理数の切断 (A,B) には，

(a) A に最大数が存在するが，B には最小数は存在しない．

(b) A に最大数は存在しないが，B には最小数が存在する．

(c) A に最大数は存在せず，B にも最小数は存在しない．

という３つの場合があり得る[3]．例えば，上に述べた例は (c) のケースにあたる．

この有理数の切断を用いて，実数の集合 $\mathbb{R}$ を次のように定義する．

定義 4．以下のルールで切断を "数" と思い，実数を定義する．

(1) 切断 (A,B) が (a) のケースであるとき，A の最大数 $a\in\mathbb{Q}$ を切断 (A,B) と同一視する．また，(b) のケースであるときは，B の最小数 $b\in\mathbb{Q}$ を切断 (A,B) と同一視する．ただし，１つの有理数 $r\in\mathbb{Q}$ に対して

$$A_1=\{x\in\mathbb{Q}\mid x\leq r\},\quad B_1=\{x\in\mathbb{Q}\mid x>r\},$$

$$A_2=\{x\in\mathbb{Q}\mid x<r\},\quad B_2=\{x\in\mathbb{Q}\mid x\geq r\},$$

とおけば，切断 (A_1,B_1), (A_2,B_2) は共に $r\in\mathbb{Q}$ に対応することになる．この場合は，(A_1,B_1) と (A_2,B_2) は「同値」であるということにし，同値な切断のペア (A_1,B_1), (A_2,B_2) に対して１つの有理数が定まっていると思うことにする[4]．

(2) 切断 (A,B) が (c) のケースであるとき，(1) のルールでは対応する数を取れない．そこで，この場合には，切断 (A,B) 自身を新しい "数" と考え，これを無理数と呼ぶ．

[2]今は「有理数しか知らない」と仮定しているので，本当は「$\sqrt{2}$ とは何か？」ということに答えなければならないが，とりあえず保留する（すぐ後で答を述べる）．

[3]「本当にこの３つだけか？」というのはちょっと気になるが，直感的には明らかだろう．いまは「有理数は既知」としているので，これは認める．

[4]高級な言い方をすれば「この同値関係による同値類と有理数が対応する」ということになる．

(3) 有理数と無理数を合わせた全体を実数の集合と定め，$\mathbb{R}$ と書く．

この定義では，実数とは切断，もしくは切断のペアのことであり，これにどうやって和や積や大小関係を定義したらいいのかは，明らかではない．しかし，次の定理が成り立つ．

定理５．このように定めた $\mathbb{R}$ に対し，和，積，大小関係を（$\mathbb{Q}$ のそれと両立するように）定義することが出来て，さらに性質 I, II, III を全て満たす．すなわち，有理数の全体 $\mathbb{Q}$ の存在さえ認めれば，実数は有理数から構成することができる．

ここで，切断のペアの部分に関しては，これが有理数と対応していたことを思い出そう．自然数や整数も有理数の一部だから，こうして定めた（切断，もしくは切断のペアとしての）実数の中で，“自然数”，“整数” 等の概念が意味を持つことになるのである．

命題６．有理数の切断を用いて構成した $\mathbb{R}$ に対して，アルキメデスの公理とはさみうちの原理が成り立つ．

つまり，アルキメデスの公理とはさみうちの原理は『上記 I,II,III から証明出来ること』なのである．より強く，次が成り立っている．

定理７．上記 III が成り立つことと，アルキメデスの公理とはさみうちの原理がともに成り立つことは，同値である．

以上をまとめると，

- 有理数の切断を用いて，上記 I,II,III を満たすものが具体的に構成出来る（これを $\mathbb{R}$ と書く）．
- しかも，そのようなものは本質的に１つしかない．すなわち，実数の全体というのは，上記 I,II,III によって一意的に特徴付けられる．
- 定理７により，III の替わりに講義中の I と II（アルキメデスの公理とはさみうちの原理）を “実数の公理” として，そこから議論を始めても構わない．

ということになる．

直感的には上記 III よりも，アルキメデスの公理とはさみうちの原理の方がわかり易いと思うので，講義ではそれを出発点として議論を始めよう，というわけである．

大事なことは,『それらが同値だから，何を定義にしても良い』ということである．特に，アルキメデスの公理は当たり前すぎて,『何でこんなことをいちいち言うのか？』と思うかもしれないが，これにはこういう論理的理由があるのである．決して『後で使うから，最初に仮定しておく』というわけではない．

多くの人はいい加減嫌になっていると思うので，そろそろ止めにしようと思うが，最後にもう一つ注意をしておく．

実は，これではまだ議論は不十分である．なぜならば,『上記 I,II,III を満たす集合 X の存在』を示すにあたって，有理数の存在を仮定してしまっていた．これについては,

(1) 自然数を構成する．

(2) それを用いて整数を構成する．

(3) それを用いて有理数を構成する．

という手順で示される．一番大変なのは，実は (1) の部分で,『自然数論の無矛盾性』とも呼ばれている．これは１年生の微積の範囲を遥かに越えてしまう話なので，この講義では一切解説しない．

ここまで説明すれば納得してもらえることと思うが，以上のような話をまじめにしようと思うと，実数の構成だけで１年間終わってしまう（というより，多分１年でも足りない！）.『実数は正しく構成出来たけれども，微分も積分も計算出来ない』というのでは，本末転倒というものだろう．

講義で『アルキメデスの公理とはさみうちの原理を出発点とする』としたのは,このような理由による．