

2012年度冬学期数学IA 中間試験問題

(2012年12月19日 16:30~18:00(90分), 持ち込み不可)

担当: 斉藤 義久

- 各設問ごとの注意事項をよく読み, 答案を作成すること. 特に『答のみで良い』と明記していない場合は, 全て記述式の問題である. 記述式の問題に対して何の説明もなしに答しか書いていない場合は, 大幅な減点の対象となる.
- 答案は日本語で作成すること. 判読不能の文字や矢印が多用してある答案は日本語と認めない場合がある.
- 講義中に証明した定理や命題は断りなく用いて良い. また, 講義中に説明していない定理や命題を使っても良いが, その場合にはどのような定理を使ったのかを明記し, その定理の主張を正確に書くこと. 正確でなければ大幅な減点の対象となる.
- 敢えて問題は多めにしているが, 単位を取得するだけなら必ずしも全ての問題を解く必要は無い. 自信の無い者は, 解けそうな問題から手を付けることを勧める.

-
- 遅刻は30分まで認める. それ以後(17:00以降)の入室は, 一切認めない.
 - 17:00~17:50の間は途中退出を認める. その場合は答案を監督者に提出し, 速やかに退出すること.
 - 終了10分前以降(17:50以降)の退出は, これを認めない.

[1] 次の関数の原始関数を求めよ（積分定数は無視して良い）．ただし，解答は答だけで良い．また，解答は出来るだけ簡単な形に整理すること．

(1) $x^2 \cos x$ (2) $\frac{1}{x^3 - 1}$

[2] $a > 0$ を定数とし，極方程式

$$r = a\theta \quad (0 \leq \theta \leq 2\pi)$$

で定義される曲線の概形を書け．また，この曲線の長さを求めよ．

注) 曲線の概形に関しては，答だけで良い．ただし x 軸， y 軸 との交点を必ず明記すること（長さの計算は，過程も書くこと）

[3] 広義積分 $I = \int_0^{\pi/2} \log \sin x dx$ に関して，次の問いに答えよ．

(1) I が収束することを示せ．

(2) (1) を示した上で， I の値を求めよ．

注) (1) を仮定して，(2) のみを解答した場合は，減点の対象となる．

[4] $s \geq 1$ とするとき，広義積分 $\int_0^{\infty} e^{-x} x^{s-1} dx$ は絶対収束することを示せ．

[5] $[-1, 1]$ 上の関数 $T_n(x)$ を次で定める．

$$T_n(x) = \cos(n \operatorname{Arccos} x) \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

(1) $T_n(x)$ は n 次多項式であることを示せ．

(2) $\int_{-1}^1 \frac{T_m(x) T_n(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx$ を計算せよ．

注) (2) の積分は広義積分であることに注意せよ（ $x = \pm 1$ で被積分関数は発散する）．また，必要なら公式

$$2 \cos mx \cos nx = \cos(m+n)x + \cos(m-n)x$$

を用いよ．