２０１２年度数学IA冬学期期末試験問題

（2月１４日，１０：５５～１２：２５（９０分），持ち込み不可）

担当：斉藤　義久

- **答案は日本語の文章で作成すること．単なる数式の羅列であったり，矢印等の記号を多用しすぎて意味不明になっている場合には，日本語の文章と認めない場合がある．**
- **字が汚くて読めない場合，仮に正しいことが書いてあったとしても『判読不能』と見なして採点しない可能性があるので，注意すること．**
- **解き方に指定がある問題を指定通りの方法で解かなかった場合，答が正しくても減点の対象になる場合があるので，注意すること．**
- **講義中に証明しなかった定理を解答中に用いる場合は，その定理の正確な主張を明記した上で用いること．その場合，可能なら証明を併記することが望ましいが，あまりに解答が長くなる等，答案作成上の問題が生じる場合は，証明は書かなくても良い．ただし，証明を併記しなかった場合には減点の対象にすることもあるので，注意すること．**

問　題

[1] 次の級数の収束・発散を判定せよ.

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$　　(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^2+3n+2}$　　(3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$

[2] D と $f(x,y)$ を以下のように与えるとき，積分 $\displaystyle\int\int_D f(x,y)dxdy$ の値を求めよ. ただし a は正の定数とする.

(1) $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x\ge 0,\ y\ge 0,\ x+y\le a\},\quad f(x,y)=xy$

(2) $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 0\le x\le a,\ y^2\le x\},\quad f(x,y)=\dfrac{1}{\sqrt{x-y^2}}$

[3] 『２重積分の変数変換公式』とはどのようなものか，正確に 述べよ.

[4] 次の積分を計算せよ.

$$\int\int_D \mathrm{Arctan}\frac{y}{x}dxdy,\quad D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x\ge 0,\ y\ge 0,\ x^2+y^2\le 1\}$$

[5] (1) ３次元空間における極座標変換

$$x=r\sin\theta\cos\mu,\quad y=r\sin\theta\sin\mu,\quad x=r\cos\theta$$

のヤコビアン（ヤコビ行列の行列式）を求めよ.

(2) f を２変数連続関数，$0<a<b<2\pi,\ 0<p<q<\pi$ として，３次元空間内の図形 K を

$$K=\Big\{(x,y,z) \mid 0\le r\le f(\theta,\mu),\ a\le\theta\le b,\ p\le\mu\le q\Big\}$$

で定める．K の体積を $V(K)$ とするとき，次を示せ.

$$V(K)=\int\int_D\frac{f(\theta,\mu)^3}{3}|\sin\theta|d\theta d\mu,\quad D=[a,b]\times[p,q]$$

[6] (1) ガンマ関数とベータ関数の関係式を正しく書け.

(2) これを証明せよ.

(3) a を正の定数，$D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid |x|^a+|y|^a\le 1\}$ とする．D の面積をガンマ関数を用いて表せ.