２０１２年度数学IA 小テスト（第９回）

（１１月１２日）

担当：斉藤　義久

[1] 次の関数の原始関数を求めよ．

(1) $\dfrac{2x^4+x^2-3x+1}{x^3-3x^2+2x-6}$　(2) $\dfrac{x^4+2x^2+1}{x^6-3x^4+3x^2-1}$　(3) $\dfrac{1}{\sin x}$

注）答えは，“出来るだけ簡単な形” にまで整理すること．

[2] 関数 $P_n(x)$ $(n=0,1,2,\cdots)$ を次式で定義する：

$$P_n(x) := \frac{1}{2^n n!}\sqrt{\frac{2n+1}{2}}\frac{d^n}{dx^n}(1-x^2)^n$$

(1) $P_n(x)$ は $[-1,1]$ 上，可積分であることを示せ．

(2) $\displaystyle\int_{-1}^{1} P_m(x)P_n(x)dx$ を計算せよ．

(3) $Q(x)=a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1}+\cdots+a_1x+a_0$（ただし $a_m\neq 0$）とするとき，積分 $\displaystyle\int_{-1}^{1} P_m(x)Q(x)dx$ を計算せよ．

[3] $f(x)$ を $[a,b]$ 上の有界な可積分関数とし，$[a,b]$ 上の関数 $F(t)$ を

$$F(t)=\int_a^t f(x)dx$$

と定める．

(1) $F(x)$ は (a,b) で微分可能とは限らない．このような例を構成せよ．

(2) $F(x)$ が (a,b) で微分可能であるとする．このとき『$F(x)$ は $f(x)$ の原始関数である』と言えるか？正しければ証明し，間違っているなら反例を挙げて説明せよ．

注）$f(x)$ の連続性が仮定されていれば，$F(x)$ は (a,b) で微分可能であり，さらに $F(x)$ は $f(x)$ の原始関数でもある（これは微積分の基本定理）．『$f(x)$ の連続性を仮定しない場合に何が起こるか？』というのが，この問題の主旨．