２０１２年度数学IA小テスト（第８回）

（１０月２９日）

担当：斉藤　義久

[1] $f(x)$ を $[a,b]$ 上の可積分関数とする．関数 $F(t)$ を

$$F(t)=\int_a^t f(x)dx \quad (a\le t\le b)$$

と定めるとき，$F(t)$ は (a,b) 上連続であることを示せ.

注）この問題では $f(x)$ の連続性は仮定されていない．したがって，微積分の基本定理は使えないことに注意せよ.

[2] リーマン積分の定義に基づき，$\displaystyle\int_0^{\pi/2}\sin x dx=1$ を示せ.

ヒント）いきなり考えるのが難しい場合は，以下の例題とその解答を参考にせよ.

<u>例題</u> リーマン積分の定義に基づき，$\displaystyle\int_a^b xdx=\frac{b^2-a^2}{2}$ を示せ.

<u>解答</u> 分割 $\Delta : a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$ を任意に取る．また i 番目の小区間 $[x_{i-1},x_i]$ の中から中点 $c_i^0 := (x_{i-1}+x_i)/2$ をとる．このとき，リーマン和 $S(x,\Delta,\{c_i^0\})$ は次のように計算される.

$$\begin{aligned}S(x,\Delta,\{c_i^0\})&=\sum_{i=1}^n c_i^0(x_i-x_{i-1})=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^n(x_i^2-x_{i-1}^2)=\frac{x_n^2-x_0^2}{2}\\&=\frac{b^2-a^2}{2}.\end{aligned}$$

分割 Δ の各小区間の幅の最大値を $\delta(\Delta)$ とすると，一般のリーマン和 $S(x,\Delta,\{c_i\})$ と上で考えた特殊なリーマン和 $S(x,\Delta,\{c_i^0\})=(b^2-a^2)/2$ の差は,

$$\begin{aligned}\left|S(x,\Delta,\{c_i\})-\frac{b^2-a^2}{2}\right|&\le\sum_{i=1}^n|c_i-c_i^0|(x_i-x_{i-1})\\&<\sum_{i=1}^n\delta(\Delta)(x_i-x_{i-1})\quad(\because |c_i-c_i^0|<\delta(\Delta))\\&=\delta(\Delta)(b-a)\end{aligned}$$

と評価出来る．右辺は $\delta(\Delta)\to 0$ のとき 0 に収束するので,

$$\int_a^b xdx=\lim_{\delta(\Delta)\to 0}S(\Delta,f,\{c_i\})=\frac{b^2-a^2}{2}.$$

[3] $[1,2]$ 上の関数 $f(x)$ を，

$$f(x) = \begin{cases} 0 & (x \text{ は無理数}) \\ \dfrac{1}{q} & \left(x = \dfrac{p}{q} \text{ は有理数．ただし } \dfrac{p}{q} \text{ は既約で，} q > 0 \right) \end{cases}$$

と定める．

(1) $f(x)$ が $[1,2]$ 上可積分であることを示せ．

(2) $\displaystyle\int_1^2 f(x)dx = 0$ を示せ．

注）(1) を解くのが難しい場合は，(1) を認めて (2) だけ解答しても良い．