２０１２年度数学IA小テスト（第６回）

（７月２日）

担当：斉藤　義久

[1] 次の議論には誤りがある．どこが間違っているかを指摘し，正しく修正せよ．

議論：$f(x,y)$ を２変数関数とする．また，変数変換

$$x = u - v, \quad y = v$$

によって，$f(x,y)$ を u と v の２変数関数とみなす．このとき，$y = v$ だから，y に関して偏微分することと，v に関して偏微分することは同じである．すなわち，

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial v}$$

である．

[2] 集合 X と集合 Y を次のように定める．

$$X = \{(r,\theta) \mid 0 < r < 1,\ 0 < \theta < 2\pi\},$$
$$Y = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 < 1\} \setminus \{(x,0) \mid 0 \le x < 1\}.$$

極座標変換が定める写像

$$\Phi : (r,\theta) \mapsto (x,y) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$$

は X から Y への１対１の写像であるから，(x,y) に対して (r,θ) を対応させる写像が存在する．これを Φ の逆写像と呼び，Φ^{-1} と書く．

(1) Φ^{-1} の具体形を求めよ．

(2) Φ^{-1} が C^1-級であることを示し，その Jacobi 行列 $J_{\Phi^{-1}}$ を求めよ．

(3) J_Φ と $J_{\Phi^{-1}}$ の積を計算せよ．

[3] ２変数の極座標変換

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta$$

を考える．このとき２変数のラプラシアン

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

を極座標系 (r,θ) で表示せよ．

[4] 3変数の極座標変換

$$x = r\sin\theta\cos\varphi, \quad y = r\sin\theta\sin\varphi, \quad z = r\cos\theta$$

を考える．

(1) この変換は，２つの変換

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi \\ z = z \end{cases}, \qquad \begin{cases} z = r\cos\theta \\ \rho = r\sin\theta \\ \varphi = \varphi \end{cases}$$

の合成で書けることを示せ．

(2) 3変数のラプラシアン

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

を極座標系 (r, θ, φ) で表示せよ．

○ 発展問題

[4] を，(1) の誘導を用いずに，直接計算で解け．