２０１２年度数学IA小テスト（第５回）

（６月１８日）

担当：斉藤　義久

[1] 次の命題が間違っていることを，

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y}{x^4+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

を例にとり，説明せよ．

(間違った) 命題.
極座標表示を用いて $(x,y)=(r\cos\theta, r\sin\theta)$ と書く．任意に固定した θ に対し，

$$\lim_{r\to 0} f(r\cos\theta, r\sin\theta)=0$$

が成り立つならば，

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=0$$

である．

[2] X, Y を集合，$F: X\to Y$ を X から Y への写像とする．部分集合 $U\subset X$, $V\subset Y$ に対し，

$$F(U)=\{y\in Y \mid x\in U \text{ が存在して } y=F(x)\}$$

$$F^{-1}(V)=\{x\in X \mid F(x)\in V\}$$

とおく．$F(U)$ は U の F による像，$F^{-1}(V)$ は V の F による逆像と呼ばれる．

(1) $V=F(F^{-1}(V))$ を示せ．

(2) $U\subset F^{-1}(F(U))$ を示せ．また，$U\neq F^{-1}(F(U))$ となる例を構成せよ．

[3] X を $\mathbb{R}^2$ 内の開集合とし，X から $\mathbb{R}^2$ への写像 F を，

$$F(x,y)=\big(f_1(x,y), f_2(x,y)\big)$$

で定める．ここに $f_i(x,y)$ $(i=1,2)$ は X から $\mathbb{R}$ への２変数関数である．このとき，次は同値であることを示せ．

(a) 各 $f_i(x,y)$ は，ともに X 上連続である．

(b) $\mathbb{R}^2$ の任意の開集合 V に対して，

$$F^{-1}(V) = \big\{(x,y) \in X \mid F(x,y) \in V\big\}$$

は $\mathbb{R}^2$ の開集合である．

注）(1) $f_j(x,y)$ が X 上の連続関数であるとは,『任意の $(a,b) \in X$ に対して，$f_j(x,y)$ が (a,b) で連続であること』と定める．
(2) 『空集合は開集合である』 と定義する．
(3) 上記の同値な条件を満たすとき，F **は連続である**という．

コメント）これは次のように一般次元に拡張される．余力のある者は自分で確かめてみると良いだろう．

命題．$X \subset \mathbb{R}^m$ を開集合，$F : X \to \mathbb{R}^n$ を写像とする．座標を用いて

$$F(x_1, \cdots, x_m) = \big(f_1(x_1, \cdots, x_m), \cdots, f_n(x_1, \cdots, x_m)\big)$$

と表示する．このとき，次は同値．
(a) 各 $f_j(x_1, \cdots, x_m)$ $(1 \leq j \leq n)$ は，全て X 上連続である．
(b) $\mathbb{R}^n$ の任意の開集合 V に対して，$F^{-1}(V)$ は $\mathbb{R}^m$ の開集合である．

[4] 複素数の全体 $\mathbb{C}$ を対応

$$\mathbb{C} \ni z = x + y\sqrt{-1} \mapsto (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

によって，$\mathbb{R}^2$ と見なす．
(1) この同一視のもとに，$\mathbb{C} \setminus \{0\}$ は $\mathbb{C}$ の開集合であることを示せ．
(2) $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ とする．このとき，$\mathbb{C} \setminus \{0\}$ から $\mathbb{C}$ への写像 F を

$$F : \mathbb{C} \setminus \{0\} \ni z \mapsto \frac{1}{z} \in \mathbb{C}$$

で定める．上記の対応で $\mathbb{C}$ を $\mathbb{R}^2$ と同一視し，値域の $\mathbb{R}^2$ の中で円

$$S = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 \mid (u-a)^2 + (v-b)^2 = r^2\} \qquad (\sqrt{a^2+b^2} > r > 0)$$

を考える．逆像 $F^{-1}(S)$ を求めよ．
(3) F は連続写像であることを示せ．