# ２０１２年度数学IA小テスト（第４回）

（６月４日）

担当：斉藤　義久

[1] $f(x)$ を $\mathbb{R}$ で定義された関数とする．

(1) $f(x)$ が微分可能で，かつ $f'(x)=0$ ならば，$f(x)$ は定数関数であることを示せ．

(2) $f(x)$ が $n+1$ 回微分可能で，かつ $f^{(n+1)}(x)=0$ ならば，$f(x)$ は $n$ 次以下の多項式関数であることを示せ．

注）微積分の基本定理を使えば主張は当たり前であるが，積分はまだやっていない．本問で要求されているのは『微積分の基本定理は使わずに，これまで講義で証明したことのみを用いて示せ』ということである．

ヒント）微分を使っているのだから，微分を定義した以降に証明した定理のうち，どれかを使うに決まっている！

[2] $X$ を $a$ をその内部に含む $\mathbb{R}$ の部分集合，$Y$ を $X$ から $a$ を除いた集合（$Y=X\backslash\{a\}$ と書く）とする．また $f(x), g(x)$ を $X$ 上定義された連続関数で，$Y$ 上で微分可能とする．さらに $Y$ 上では $g'(x)\neq 0$ とする．このとき，極限値 $\lim_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ が存在するならば，

$$\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)}$$

であることを示せ．

[3] 上問と同じ記号を用いる．さらに極限値 $\lim_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)}$ が存在すると仮定する．このとき，

$$\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)}$$

は成り立つか？ 成り立つなら証明し，そうでないなら反例を挙げて説明せよ．

[4] $f(x)$ は $n+1$ 回微分可能な関数とする．このときテイラーの定理から

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k+\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

と表示出来る．ここに，$c$ は $x$ と $a$ の間のある実数である．上式の多項式部分

$$f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

を，$f(x)$ の $n$ **次のテイラー近似多項式**と呼ぶことにする[1]

(1) $\displaystyle\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f_n(x)}{(x-a)^n} = 0$ を示せ．

(2) $n$ 次以下の多項式 $P(x)$ が

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)-P(x)}{(x-a)^n} = 0 \qquad (*)$$

を満たすならば，$P(x) = f_n(x)$ であることを証明せよ．

注）一般に示すのが大変な場合は，$a=0$ と仮定しても構わない（そうしたとしても，問題の本質は変わらない）．

コメント）この問題は

条件 $(*)$ が，$n$ 次のテイラー近似多項式 $f_n(x)$ を一意的に特徴づける

ということを主張していることになる．

[1] これは一般的な呼び方ではなく，ここだけの言い方．