２０１２年度数学IA小テスト（第３回）

（５月２１日配布）

担当：斉藤　義久

[1] 次の極限値を求めよ．

(1) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}$　　(2) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x^2}$　　(3) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x)}{x}$

注）この問題に関しては ε-δ 論法を用いなくても良い．

[2] $\mathbb{R}$ 上で定義された関数 $f(x)$ を次のように定める．

$$f(x)=\begin{cases} x^3\sin\dfrac{1}{x^2} & (x\neq 0)\\ 0 & (x=0)\end{cases}$$

(1) $f(x)$ は $\mathbb{R}$ 全体で連続であることを示せ．

(2) $f(x)$ は $\mathbb{R}$ 全体で微分可能であることを示し，導関数を求めよ．

(3) $f'(x)$ は $\mathbb{R}$ 全体で連続かどうか，判定せよ．

注意）必要な証明（および説明）は全て ε-δ 論法によって行うこと．

[3] $f(x)=e^x-e^{-x}$ とする．e^x および $-e^{-x}$ はともに狭義の単調増加連続関数だから，$f(x)$ も狭義の単調増加連続関数であり，したがって逆関数 $f^{-1}(x)$ が存在する．$f^{-1}(x)$ を既知の関数（有理関数，n 乗根を取る関数，三角関数，指数関数，対数関数）の合成を用いて表示せよ．

[4] $\mathbb{R}$ 上で定義される関数 $f(x)$ は次を満たすとする．

- $f(x)$ は $\mathbb{R}$ 上連続である．
- 任意の $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ に対し，$f(x_1+x_2)=f(x_1)+f(x_2)$.

このような条件を満たす $f(x)$ は，$f(x)=ax$ (a は定数) に限ることを示せ．

ヒント）[4] はテキストの問題 1.3 の問 3（p.37）そのものである．巻末に解答が出ているが，省略した形で書いてあるので，その点を埋めて解答を完成させよ．