２０１２年度数学IA小テスト（第２回）

（５月７日）

担当：斉藤　義久

[1] $X = \mathbb{R}_{>0}$（正の実数全体）とする．$f(x) = \sqrt{x}$ は X で連続であることを示せ．

[2] $a \in \mathbb{R}$ とし，２つの関数 $f(x), g(x)$ はその定義域の内部に a を含むとする．また $f(x)g(x)$ は a で連続であると仮定する．このとき各 $f(x), g(x)$ の a での連続性についてどのようなことが言えるか？ 以下の (ア)〜(ウ) から１つ選び，その理由を説明せよ．

(ア) $f(x)$ と $g(x)$ はともに a で連続である

(イ) $f(x)$ と $g(x)$ のうち，少なくとも一方は a で連続である

(ウ) どちらも a で連続とは限らない

注）(ア)，(イ) を選択した場合は，それを証明せよ．(ウ) を選択した場合は，そのような例（$f(x)$ と $g(x)$ がともに連続ではなく，かつ $f(x)g(x)$ が連続である例）を構成せよ．

[3] $X = [0, 1]$ とする．以下の条件を満たすような X 上の関数 $f(x)$ の例を構成せよ．

・$x_1 < x_2$ ならば，$f(x_1) < f(x_2)$ である（$f(x)$ は狭義単調増加関数）．

・$f(x)$ は X 内に無限個の不連続点を持つ．

注）単に例を作るだけではなく，作った後，それが狭義単調増加であること，および不連続点を無限個持つことに証明を与えること．($f(x)$ を与えるだけではダメ)

[4] a を無理数とするとき，次の条件を満たす数列 $\{a_n\}$ が存在することを示せ．

・各 a_n は全て有理数である．

・$a_n \to a$ $(n \to \infty)$.

○ <u>発展問題</u>

$\mathbb{R}$ 上の関数 $f(x)$ を次のように定める.

- x が無理数のとき：$f(x) = 0$ とおく.
- x が有理数のとき：まず x を既約有理数で $x = \dfrac{p}{q}$ $(q > 0)$ と表示し[1]，$f(x) = \dfrac{1}{q}$ と定める.

(1) a が無理数のとき，$f(x)$ は $x = a$ で連続であることを示せ.

(2) a が有理数のとき，$f(x)$ は $x = a$ で不連続であることを示せ.

[1] 有理数 $\dfrac{p}{q}$ が既約であるとは，p と q が互いに素であることをいう.