２０１２年度数学IA小テスト（第１２回）

（１月１５日配布）

担当：斉藤　義久

- **注意事項**

今回の演習では，まだ講義で解説していない事柄を扱う．解答にあたっては，以下のことは既知として認めて良い．

D を E を $\mathbb{R}^2$ 内の区分的になめらかな曲線で囲まれた有界閉領域，W を D をその内部に含む有界領域とする．また，写像 $\Phi : W \to \mathbb{R}^2$ は C^1-級とする．すなわち，座標で

$$\Phi(u,v) = (x(u,v), y(u,v)) \quad (u,v) \in W$$

と書いたとき，$x(u,v), y(u,v)$ は W 上の C^1-級関数であるとする．さらに，$\Phi(D) = E$ であるとする．

定理１（重積分の変数変換公式）

f を E 上の連続関数とする．また，$\Phi : D \to E$ と思ったとき，Φ は１対１で，さらに $\det(J_\Phi)$ は D 上 0 にならないとする．ここに J_Φ は Φ のヤコビ行列である．このとき，

$$\int\int_E f(x,y)dxdy = \int\int_D f(x(u,v), y(u,v))\det(J_\Phi)dudv.$$

注意この定理は，次の形にまで弱められる．

定理２

f および $\Phi : D \to E$ を上の通り（定理より上の部分）とする．C を D 内の区分的になめらかな曲線とし，写像 Φ は

$$\Phi : D \setminus C \to E \setminus \Phi(C)$$

と思った時に１対１で，かつ $\det(J_\Phi)$ は $D \setminus C$ 上 0 にならないとする．この場合でも変数変換公式

$$\int\int_E f(x,y)dxdy = \int\int_D f(x(u,v), y(u,v))\det(J_\Phi)dudv.$$

が成り立つ．

[1] $f(x,y)=e^{-x}(x\sin y - y\cos y)$ とする．また，C を任意の $\mathbb{R}^2$ 内の区分的になめらかな閉曲線とする．このとき次を示せ：

$$\int_C \frac{\partial f}{\partial y}dx = \int_C \frac{\partial f}{\partial x}dy.$$

[2] $a>0$ とする．３次元空間内で，半径 a の球と半径 $a/2$ の円柱の共通部分の体積を求めよ．ただし，球の中心は円柱の表面上にあるとする．

注）一般に，３次元空間内の図形 X に対し，その体積 V は

$$V=\int\int\int_X 1dxdydz$$

で定義される．講義ではフビニの定理は２変数関数に関してしか証明していないが，本問では『３変数関数に対してもフビニの定理が成り立つ』ことは仮定して良い[1]．

定理（３変数版フビニの定理）

D を xy 平面内の区分的になめらかな曲線で囲まれた有界閉領域，φ,ψ を D 上の連続関数とし，xyx 空間内の領域

$$X=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid \varphi(x,y)\le z\le\psi(x,y),(x,y)\in D\}$$

とする．$f(x,y,z)$ を X 上の連続関数とするとき，

$$\int\int\int_X fdxdydz=\int\int_D\left(\int_{\varphi(x,y)}^{\psi(x,y)} fdz\right)dxdy.$$

[3] $f(\theta)$ を $[\alpha,\beta]$ 上の正値 C^1-級関数とし，極方程式 $r=f(\theta)$ $(\alpha\le\theta\le\beta)$ で定義される曲線を C を考える．ただし $0\le\alpha<\beta<2\pi$ とする．

(1) C と２直線 $\theta=\alpha,\theta=\beta$ で囲まれる領域を E とするとき，

$$E\text{ の面積}=\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta f(\theta)^2d\theta$$

であることを示せ．

(2) 曲線 $x^3-3axy+y^3=0$ $(a>0)$ を，極方程式で表示せよ．また，その概形を図示せよ．

(3) (2) で与えた曲線を C とするとき，C が囲む図形の面積を求めよ．

[1] 証明の方法は，２変数のときと本質的に同じ．