２０１２年度数学IA小テスト（第１１回）

（１２月１０日配布）

担当：斉藤　義久

● 注意事項

今回の演習では，まだ講義で解説していない事柄を扱う．解答にあたっては，以下のことは既知として認めて良い．

D を $\mathbb{R}^2$ の有界集合，R を D を含む長方形領域とする．また，f を D 上定義された有界関数とする．このとき，R 上の関数 f_R を以下で定める．

$$f_R(x,y) := \begin{cases} f(x,y) & \text{if } (x,y) \in D, \\ 0 & \text{if } (x,y) \notin D. \end{cases}$$

定義 上で定めた関数 f_R が R 上可積分であるとき，f は D 上可積分であるという．また，このとき

$$\int\int_D f(x,y)dxdy := \int\int_R f_R(x,y)dxdy$$

と定める．

定理１ 有限個の区分的になめらかな曲線で囲まれた有界閉領域上の連続関数は，可積分である．

（証明）この有界閉領域を D とし，$D \subset R$ なる長方形領域をとる．また D の境界を ∂D と書く．f を D 上の連続関数とすると，構成から f_R は $R \setminus \partial D$ 上の連続関数であり，しかも ∂D は有限個の区分的になめらかな曲線である．したがって，定理 5.1.6 より，f_R は R 上可積分である．ゆえに f は D 上可積分である． □

定義 $g(x)$,$h(x)$ を $[a,b]$ 上の（１変数）連続関数とする．$\mathbb{R}^2$ 内の領域 D が，

$$D = \left\{ (x,y) \;\middle|\; a \le x \le b,\ g(x) \le y \le h(x) \right\}$$

と書けるとき，タテ線領域であるという．

定理２（フビニの定理） D をタテ線領域，$f(x,y)$ を D 上の連続関数であるとする．このとき，x の１変数関数

$$\int_{g(x)}^{h(x)} f(x,y)dy$$

は $[a,b]$ 上定義された連続関数で，さらに

$$\int\int_D f(x,y)dxdy = \int_a^b \left(\int_{g(x)}^{h(x)} f(x,y)dy \right) dx \qquad (*)$$

が成り立つ．

注）$g(x)$,$h(x)$ が（区分的に）C^1-級であれば，タテ線領域は区分的になめらかな曲線で囲まれた有界閉領域である[1]．したがって，この場合には定理 1 より f は D 上可積分で，$\displaystyle\int\int_D f(x,y)dxdy$ は意味を持つ．その上で，定理 2 の主張は，

『この積分（$(*)$ の左辺）を，2 回の積分の繰り返し（反復積分）で，
$(*)$ の右辺のように計算して良い』

というものである．証明は講義で解説することとし，今回の演習ではフビニの定理を認めて計算して良い．

---

[1] 次の重積分を計算せよ．

(1) $\displaystyle\int\int_D (2-x^2-y^2)dxdy, \quad D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 0\leq x\leq 1,\ -1\leq y\leq 1\}$

(2) $\displaystyle\int\int_D (x^2+y^2)dxdy, \quad D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 0\leq x\leq 1,\ 0\leq y\leq x\}$

(3) $\displaystyle\int\int_D |x|dxdy$, D は原点を中心とする半径 1 の円盤

(4) $\displaystyle\int\int_D y^2e^{x^2}dxdy$, D は $(0,0)$, $(1,0)$, $(1,1)$ を頂点とする三角形

[2] 次の図形の体積を求めよ．

(1) $x+y+z=6,\ x=0,\ x+2y=4,\ z=0$ で囲まれる領域

(2) $x+y+z=6,\ x=y,\ y=0,\ x=3,\ z=0$ で囲まれる領域

(3) 半径が a の 2 つの直円筒の軸が角度 θ で交わっているとき，この 2 つの直円筒の共通部分

[3] $\mathbb{Q}$ を有理数全体からなる集合とする．このとき $\mathbb{R}^2$ の有界な部分集合 X を，

$$X:=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \;\middle|\; \begin{array}{c} 0\leq x,y\leq 1 \\ x\notin\mathbb{Q} \text{ または } y\notin\mathbb{Q}\end{array}\right\}$$

と定める．このとき

$$\int\int_X 1dxdy$$

は，存在するか？

[1] 定理 2 では『$g(x)$,$h(x)$ は $[a,b]$ 上連続』としか仮定していないので，条件がずっと弱いことに注意．今回の問題に出てくるケースでは，全て C^1-級なので，上のように考えてもらって差し支えない．ちなみに，講義では連続性のみ仮定して，証明をする予定．