２０１２年度数学IA小テスト（第１０回）
（１１月２６日）

担当：斉藤　義久

[1] (1) a を正の定数とし，xy 平面上に2点 $A=(a,0)$, $B=(-a,0)$ をとる．このとき，$P=(x,y)$ であって，

$$|PA|\cdot|PB|=a^2$$

を満たす点が描く軌跡の方程式を，x と y の方程式の形で求めよ．ただし $|PA|$, $|PB|$ はそれぞれ線分 PA, PB の長さを表すものとする．

(2) 上の曲線の方程式を極方程式の形で表せ．

(3) この曲線の長さをガンマ関数を用いて表せ．ただしベータ関数とガンマ関数の関係式

$$B(p,q)=\frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}\quad (p,q>0)$$

は証明せずに用いて良い．

[2] $0\le t\le 1$ とし,（広義）積分で定義される関数

$$u(k,t)=\int_0^t \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}\quad (0<k<1)$$

を考える．

(1) 問 [1] に現れる曲線の長さが $4a\times u\left(\frac{1}{\sqrt{2}},1\right)$ と表せることを示せ．

(2) 以下 k は固定された定数とし，混乱の無い限りこれを省略して $u(t)=u(k,t)$ と書く．このとき，$u(t)$ の逆関数が存在することを示し（これを $\mathrm{sn}(u)=\mathrm{sn}(k,u)$ と書く），その定義域と値域を明示せよ．さらに $\mathrm{sn}(u)$ はその定義域内で連続関数であることを示せ．

(3) 楕円 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ $(0<a<b)$ を考え，この楕円上に2点 $A=(a,0)$, $P=(a\cos\theta, b\sin\theta)$ $(\theta>0)$ をとる．AP 間の楕円の弧長を L とするとき，

$$L=b\int_0^{u_\theta}\big(1-k^2\mathrm{sn}^2(u)\big)du$$

であることを示せ．ただし $\mathrm{sn}^2(u)=\big(\mathrm{sn}(u)\big)^2$, $k=\sqrt{\frac{b^2-a^2}{b^2}}$．また u_θ は，条件 $\mathrm{sn}(u_\theta)=\sin\theta$ で一意的に決まる実数とする．

コメント）上の楕円の面積が $\pi b^2\times\frac{a}{b}=\pi ab$ で与えられることはよく知られている．他方，楕円の弧長は，面積と違って円の弧長から単純に求めることは出来ず，その計算はずっと難しい．