２０１２年度数学IA小テスト（第１回）

（４月１６日）

担当：斉藤　義久

[1] $a_n \to a$ $(n \to \infty)$, $b_n \to b$ $(n \to \infty)$ とする．

(1) $ca_n \to ca$ $(n \to \infty)$ を示せ．ただし $c \in \mathbb{R}$ は定数とする．

(2) $\dfrac{a_n}{b_n} \to \dfrac{a}{b}$ $(n \to \infty)$ を示せ．ただし $b_n \neq 0, b \neq 0$ とする．

[2] 数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は $a \in \mathbb{R}$ に収束するとする．

(1) $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ の任意の部分列 $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ は a に収束することを示せ．ただし，$\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ が $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ の部分列であるとは，以下の条件が満たされることをいう：

（条件）正の整数の列 $n_1, n_2, \cdots$ は狭義単調増加列である．

(2) 条件をゆるめて，次のルールで $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ から "部分列" $\{a_{m_j}\}_{j=1}^{\infty}$ を作る：

- $m_j \not< m_{j+1}$ でも良い（狭義単調増加列でなくても良い）.
- ただし，m_j たちは全て異なる数である（重複はしない）.

このとき，数列 $\{a_{m_j}\}_{j=1}^{\infty}$ は収束するか？そうであれば証明し，そうでなければ反例を挙げよ．

[3] 次を示せ．

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{n} \sqrt[k]{k}\right) = 1.$$

[4] 次の集合の最大値，最小値，上限，下限を調べよ．ただし $\mathbb{Z}_{>0}$ は正の整数全体の集合を表す．

(1) $\left\{ \dfrac{1}{n} \,\middle|\, n \in \mathbb{Z}_{>0} \right\}$　　(2) $\left\{ \dfrac{1}{m} - \dfrac{1}{n} \,\middle|\, m, n \in \mathbb{Z}_{>0} \right\}$

○ <u>発展問題</u>

x を実数とするとき，次の等式を示せ．

$$\lim_{n\to\infty}\left(\lim_{m\to\infty}\left(\cos(n!\pi x)\right)^{2m}\right) = \begin{cases} 1 & x \text{ は有理数} \\ 0 & x \text{ は無理数} \end{cases}$$

また，極限を取る順序を入れ替えて

$$\lim_{m\to\infty}\left(\lim_{n\to\infty}\left(\cos(n!\pi x)\right)^{2m}\right)$$

とした場合はどうなるか考えてみよ．