2011 年度夏学期・数理科学 II・講義補足プリント

斉藤　義久

7. ラプラス変換

7.1. 定義と基本的性質.

Definition 7.1.1. 1 変数関数 $f(t)$ に対し，新しい関数 $F(s)$ を

$$\mathcal{L}[f(t)] := \int_0^\infty f(t)e^{-ts}dt =: F(s)$$

と定める．この対応（変換）をラプラス変換という．

Remark . この積分が収束するのか？というのはもちろん問題だが，気にせず進める．

Example 7.1.2.

$$\mathcal{L}[1] = \int_0^\infty e^{-ts}dt = -\frac{1}{s}\left[e^{-ts}\right]_0^\infty = \frac{1}{s} \quad (s > 0).$$

Example 7.1.3.

$$\mathcal{L}[e^{at}] = \int_0^\infty e^{t(a-s)}dt = \frac{1}{s-a} \quad (s > a).$$

Lemma 7.1.4.

(1) $\mathcal{L}[af(t) + bg(t)] = a\mathcal{L}[f(t)] + b\mathcal{L}[g(t)]$.

(2) $\mathcal{L}[f'(t)] = s\mathcal{L}[f(t)] - f(0)$.

(3) $\mathcal{L}\left[\int_0^t f(u)du\right] = \frac{1}{s}\mathcal{L}[f(t)]$.

Proof. (1) は積分の線形性より明らか.

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[f'(t)] &= \int_0^\infty f'(t)e^{-ts}dt = \left[f'(t)e^{-ts}\right]_{t=0}^{t=\infty} - \int_0^\infty (-s)f(t)e^{-ts}dt \\ &= s\mathcal{L}[f(t)] - f(0) \quad \text{（(2) OK）}.\end{aligned}$$

(3) $g(t) := \int_0^t f(u)du$ とすれば，$g'(t) = f(t)$ かつ $g(0) = 0$. (2) より

$$\mathcal{L}[g'(t)] = s\mathcal{L}[g(t)] - g(0) = s\mathcal{L}[g(t)].$$

よって

$$\mathcal{L}[g(t)] = \frac{1}{s}\mathcal{L}[f(t)].$$

□

Date: June 8, 2011.

ラプラス変換を施すことによって

$$\begin{array}{ccc} \text{微分} & \leftrightarrow & s\,\text{を掛ける} \\ \text{積分} & \leftrightarrow & s\,\text{で割る} \end{array}$$

となる．つまり，微積分の計算が多項式の計算に化けることになる．

Example 7.1.5.

$$\mathcal{L}[t^n] = \frac{n!}{s^{n+1}}$$

∵) $\mathcal{L}[1] = \frac{1}{s}$ と $t^n = n\int_0^t u^{n-1}du$ から，Lemma 7.1.4 の (3) を用いればよい． □

Corollary 7.1.6.

$$\mathcal{L}[f^{(n)}(t)] = s^n\mathcal{L}[f(t)] - s^{n-1}f(0) - s^{n-1}f'(0) - \cdots - f^{(n-1)}(0).$$

Proof. Lemma 7.1.4 の (2) を繰り返し用いいればよい．例えば

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[f''(t)] &= \mathcal{L}[(f'(t))'] = s\mathcal{L}[f'(t)] - f'(0) = s\left(s\mathcal{L}[f(t)] - f(0)\right) - f'(0) \\ &= s^2\mathcal{L}[f(t)] - sf(0) - f'(0). \end{aligned}$$

□

Lemma 7.1.7. $\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$ ならば，$\mathcal{L}[e^{at}f(t)] = F(s-a)$.

Proof.

$$\mathcal{L}[e^{at}f(t)] = \int_0^\infty f(t)e^{-t(s-a)}dt = F(s-a).$$

□

Example 7.1.8.

$$\mathcal{L}[t^2e^{-t}] = \frac{2}{(s+1)^3}$$

∵) $\mathcal{L}[t^2] = \frac{2}{t^3}$ だったので，上記 Lemma より従う □

● <u>微分方程式を解くのになぜラプラス変換が有効か？</u>

Example 7.1.9.

$$x'(t) = ax(t) + f(t), \quad x(0) = b \quad \text{を解け}$$

両辺にラプラス変換を施す．

$$s\mathcal{L}[x] - x(0) = a\mathcal{L}[x] + \mathcal{L}[f].$$

$$\therefore \quad \mathcal{L}[x] = \frac{1}{s-a}\bigl(b + \mathcal{L}[f]\bigr).$$

つまり，ラプラス変換をして右辺になるような関数が求まれば，上記の微分方程式の初期値問題が解けたことになる．したがって

ラプラス変換の “辞書” が必要

ということになる．

Remark . この議論には一つ落とし穴がある．すなわち

「$\mathcal{L}[f(t)] = \mathcal{L}[g(t)]$ ならば $f(t) = g(t)$ か？」

という問題には全く触れていない．実は OK なのであるが，まじめにやると大変なので，以下このことを認めて先に進む．

7.2. **ラプラス変換の辞書.**

Example 7.2.1.

$$\mathcal{L}[\cos\omega t] = \frac{s}{s^2+\omega^2}, \qquad \mathcal{L}[\sin\omega t] = \frac{\omega}{s^2+\omega^2}$$

$\because$）Expamle 7.1.3 で示した公式

$$\mathcal{L}[e^{at}] = \frac{1}{s-a}$$

は，よく見ると実は a が虚数であっても成り立つ．実際 $a = \sqrt{-1}\omega$ として，

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[e^{\sqrt{-1}\omega t}] &= \int_0^\infty e^{t(\sqrt{-1}\omega - s)}dt = \left[\frac{1}{\sqrt{-1}\omega - s}e^{t(\sqrt{-1}\omega - s)}\right]_{t=0}^{t=\infty} \\ &= \frac{1}{\sqrt{-1}\omega - s}\left[e^{-ts}(\cos\omega t + \sqrt{-1})\sin\omega t\right]_{t=0}^{t=\infty} \\ &= \frac{1}{s-\sqrt{-1}\omega} \quad (s>0).\end{aligned}$$

したがって

$$\mathcal{L}[\cos\omega t] = \mathcal{L}\left[\frac{e^{\sqrt{-1}\omega t} + e^{-\sqrt{-1}\omega t}}{2}\right] = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-\sqrt{-1}\omega} + \frac{1}{s+\sqrt{-1}\omega}\right) = \frac{s}{s^2+\omega^2}$$

$\mathcal{L}[\sin\omega t]$ も同様の計算. □

Example 7.2.2.

$$\mathcal{L}[t\cos\omega t] = \frac{s^2-\omega^2}{(s^2+\omega^2)^2}, \qquad \mathcal{L}[t\sin\omega t] = \frac{2\omega s}{(s^2+\omega^2)^2}.$$

$\because$）前の例と同じ理由によって

$$\mathcal{L}[te^{\sqrt{-1}\omega}] = \frac{1}{(s-\sqrt{-1}\omega)^2}.$$

両辺の実部と虚部の比較からでる：

$$（左辺）= \mathcal{L}[t\cos\omega t] + \sqrt{-1}\mathcal{L}[t\sin\omega t].$$

$$（右辺）= \frac{(s+\sqrt{-1}\omega)^2}{(s^2+\omega^2)^2} = \frac{s^2-\omega^2}{(s^2+\omega^2)^2} + \sqrt{-1}\frac{2\omega s}{(s^2+\omega^2)^2}.$$

□

これまでの計算結果から基本的な関数に対するラプラス変換の対応表が得られる．

	$f(t)$	$F(s)=\mathcal{L}[f(t)]$		$f(t)$	$F(s)=\mathcal{L}[f(t)]$
(1)	t^n	$\dfrac{n!}{s^{n+1}}$	(6)	t^ne^{at}	$\dfrac{n!}{(s-a)^{n+1}}$
(2)	e^{at}	$\dfrac{1}{s-a}$	(7)	$e^{at}\cos\omega t$	$\dfrac{s-a}{(s-a)^2+\omega^2}$
(3)	$e^{\sqrt{-1}at}$	$\dfrac{1}{s-\sqrt{-1}a}$	(8)	$e^{at}\sin\omega t$	$\dfrac{\omega}{(s-a)^2+\omega^2}$
(4)	$\cos\omega t$	$\dfrac{s}{s^2+\omega^2}$	(9)	$t\cos\omega t$	$\dfrac{s^2-\omega^2}{(s^2+\omega^2)^2}$
(5)	$\sin\omega t$	$\dfrac{\omega}{s^2+\omega^2}$	(10)	$t\sin\omega t$	$\dfrac{2\omega s}{(s^2+\omega^2)^2}$

これくらい準備しておくと，初等的な定数係数線形方程式の初期値問題はだいたい解ける．

7.3. 初期値問題への応用.

Example 7.3.1.

$$x''(t)+2x'(t)+2x(t)=\sin t,\ x(0)=1,\ x'(0)=1\quad \text{を解け}$$

解）$X(s):=\mathcal{L}[x(t)]$ とおく．両辺にラプラス変換を施すと

$$s^2X(s)-s-1+2(sX(s)-1)+2X(s)=\frac{1}{s^2+1}.$$

$X(s)$ について解いて

$$X(s)=\frac{1}{(s^2+1)(s^2+2s+2)}+\frac{s+3}{s^2+2s+2}.$$

第１項を部分分数分解する（実はこの部分が一番大変！）：

$$\frac{1}{(s^2+1)(s^2+2s+2)}=\frac{-2s+1}{5(s^2+1)}+\frac{2s+3}{5(s^2+2s+2)}.$$

よって

$$X(s)=\frac{-2s+1}{5(s^2+1)}+\frac{7(s+1)+11}{5((s+1)^2+1)}.$$

ラプラス変換の対応表から

$$x(t)=-\frac{2}{5}\cos t+\frac{1}{5}\sin t+e^{-t}\left(\frac{7}{5}\cos t+\frac{11}{5}\sin t\right).$$

□

別解）ラプラス変換を使わずに，これまでのやり方でも解いてみよう．

特性多項式：$P(z)=z^2+2z+2$，特性根：$-1\pm\sqrt{-1}$．よって斉次方程式の（実数）解の一般形は

$$C_1e^{-t}\cos t+C_2e^{-t}\sin t\quad (C_1,C_2\in\mathbb{R}).$$

特殊解を作るために，まず

$$x''(t) + 2x'(t) + 2x(t) = e^{\sqrt{-1}t} \tag{$*$}$$

の特殊解を構成し，その虚部をとる．

$$\begin{aligned}(*) &\Leftrightarrow (D^2+2D+2)x(t) = e^{\sqrt{-1}t} \ \Leftrightarrow\ e^{-\sqrt{-1}t}(D^2+2D+2)x(t) = 1 \\ &\Leftrightarrow ((D+\sqrt{-1})^2 + 2(D+\sqrt{-1})+2)\big(e^{-\sqrt{-1}t}x(t)\big) = 1 \\ &\Leftrightarrow \big(D^2 + 2(1+\sqrt{-1})D + (1+2\sqrt{-1})\big)\big(e^{-\sqrt{-1}t}x(t)\big) = 1\end{aligned}$$

よって

$$e^{-\sqrt{-1}t}x(t) = \frac{1}{1+2\sqrt{-1}} \qquad (\because\ 1 \text{ は } 0 \text{ 次多項式})$$

$$\therefore \qquad x(t) = \frac{1}{5}(1-2\sqrt{-1})(\cos t + \sqrt{-1}\sin t).$$

虚部をとって，与えられた非斉次方程式の特殊解

$$x(t) = \frac{1}{5}(\sin t - 2\cos t).$$

ゆえに一般解は

$$x(t) = C_1 e^{-t}\cos t + C_2 e^{-t}\sin t + \frac{1}{5}(\sin t - 2\cos t).$$

微分して

$$x'(t) = C_1(-e^{-t}\cos t - e^{-t}\sin t) + C_2(-e^{-t}\sin t + e^{-t}\cos t) + \frac{1}{5}(\cos t + 2\sin t).$$

$$x(0) = C_1 - \frac{2}{5} = 1 \quad \Rightarrow \quad C_1 = \frac{7}{5}.$$

$$x'(0) = -C_1 + C_2 + \frac{1}{5} = 1 \quad \Rightarrow \quad C_2 = \frac{7}{5} + 1 - \frac{1}{5} = \frac{11}{5}.$$

ゆえに求める解は

$$x(t) = \frac{7}{5}e^{-t}\cos t + \frac{11}{5}e^{-t}\sin t + \frac{1}{5}(\sin t - 2\cos t).$$

この例では，どっちでやった方が楽か？はいい勝負だろう．ノート上ではラプラス変換を用いる方が計算が少なく済んでいるように見えるが，有理式の部分分数分解の部分が結構面倒で，実際の計算量は大差がない．

よく微分方程式の教科書（あるいはネット上のホームページ等）で

- 一般解を求めるにはラプラス変換を使わない方法
  (というより，ラプラス変換では一般解は求められない)
- 初期値問題を解くためにはラプラス変換

と書かれているものを見かけるが，実際には case by case と言えるだろう．

以下，ラプラス変換のメリットとデメリットをまとめておこう．

○ メリット

- 微分方程式の初期値問題を，有理式の計算だけで解くことが出来る．
- 一般解を求めることなく，初期値問題を直接解くことが出来る．

○ デメリット

- 有理式の計算は手でやると案外面倒で，実際の計算量は大差がない．
- 理論的にはブラック・ボックスだらけで，どうしてうまくいくのか？を説明出来ない．(説明するには，積分の収束性の問題や逆変換の存在等，難しい議論が必要)
- ラプラス変換の対応表に現れる公式を丸暗記していないと，使えない．

とはいえ，複数の解き方を知っていれば検算にも使えるし，役には立つと思う．

Example 7.3.2.

$$\begin{cases} x_1' + x_1 + 3x_2' &= 1 \\ x_1 + x_2' + 2x_2 &= t \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1(0) = 0 \\ x_2(0) = 0 \end{cases} \qquad \text{を解け.}$$

ラプラス変換は連立型であっても有効．

解）$X_i = \mathcal{L}[x_i]$ $(i = 1, 2)$ と書く．ラプラス変換を施すと

$$\text{（第１式）：}\quad sX_1 + X_1 + 3sX_2 = \frac{1}{s} \quad \Leftrightarrow \quad (s+1)X_1 + 3sX_2 = \frac{1}{s}.$$

$$\text{（第２式）：}\quad X_1 + sX_2 + 2X_2 = \frac{1}{s^2} \quad \Leftrightarrow \quad X_1 + (s+2)X_2 = \frac{1}{s^2}.$$

これを X_1, X_2 に関する連立方程式と思って解く：

$$X_1 = \frac{s-1}{s(s^2+2)} = \frac{-1/2}{s} + \frac{s/2+1}{s^2+2}, \qquad X_2 = \frac{1}{s^2(s^2+2)} = \frac{1/2}{s^2} + \frac{-1/2}{s^2+2}$$

よって

$$x_1(t) = -\frac{1}{2} + \frac{\cos\sqrt{2}t}{2} + \frac{\sin\sqrt{2}t}{\sqrt{2}}, \quad x_2(t) = \frac{t}{2} - \frac{\sin\sqrt{2}t}{2\sqrt{2}}.$$

□