

2011年度数学IA 夏学期中間試験問題

(6月15日, 持ち込み不可)

担当: 斉藤 義久

- 各設問ごとの注意事項をよく読み, 答案を作成すること.

[1] 次の関数の導関数を求めよ (答のみで良い).

(1) $\sqrt{1 + \frac{1}{\sqrt{x}}}$ (2) $\log(\sin(x+1))$ (3) $\text{Arcsin}(\log(x+1))$ (4) $x^{\sin x}$

[2] 次の極限值を求めよ ($\varepsilon - \delta$ 論法は, 使っても使わなくても良い).

(1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x}$ (2) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2 - 3x - 2}{x^2 - x - 2}$ (3) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x+3} - 2}{x+1}$ (4) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^n}{e^x}$

[3] 次の関数が $x = 1$ で連続であることを $\varepsilon - \delta$ 論法によって証明せよ ($\varepsilon - \delta$ 論法を用いない証明は解答と認めない).

(1) $\sin x$ (2) x^3

[4] $0 < a_1 < b_2$ とする. また $a_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}$, $b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}$ ($n = 1, 2, \dots$) と定義する. このとき数列 $\{a_n\}$ と数列 $\{b_n\}$ はともに収束し, しかも $\lim a_n = \lim b_n$ であることを証明せよ.

[5] 以下に与える関数を原点のまわりで3次以下の多項式で近似せよ. ただし, 原点のまわりで定義された関数 $f(x)$ に対し, n 次以下の多項式 $P(x)$ で近似できるとは,

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - P(x)}{x^n} = 0$ となることを言う.

(1) $\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x}$ (2) $(\cos x)^{1/\sin x}$

[6] 関数 $f(x)$ を次で定める.

$$f(x) = \begin{cases} e^{1/x} & (x > 0), \\ 0 & (x \leq 0). \end{cases}$$

(1) $f(x)$ は C^∞ 級であることを示せ.

(2) $f(x)$ を原点のまわりで近似するような多項式は存在しないことを示せ.