

2011年度数学IA 夏学期期末試験問題
(8月31日, 10:55 ~ 12:25 (90分), 持ち込み不可)

担当: 斉藤 義久

● 各設問ごとの注意事項をよく読み, 答案を作成すること.

[1] 2変数 C^2 -級関数 $f(x, y)$ が $\Delta f = 0$ を満たすとき, 調和関数であるという. ここに $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ とする. このとき, 次の関数が調和関数であることを証明せよ. ただし与えられた関数が C^2 -級であることは証明せずに用いてよい.

(1) $\log \sqrt{x^2 + y^2}$ ($(x, y) \neq (0, 0)$) (2) $\text{Arctan} \frac{y}{x}$ ($x \neq 0$)

[2] 3変数の極座標系 (r, θ, φ) を

$$x = r \sin \theta \cos \varphi, \quad y = r \sin \theta \sin \varphi, \quad z = r \cos \theta$$

で定める. このとき $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ を極座標系 (r, θ, φ) で表示せよ.

[3] 2変数関数 $f(x, y) = (xy)^{2/3}$ を考える.

(1) $f(x, y)$ は原点 $(0, 0)$ で全微分可能であることを示せ.

(2) $f(x, y)$ は原点 $(0, 0)$ で C^1 -級であるかどうか, 判定せよ.

[4] 次の関数の極値と, それを与える点を全て求めよ. ただし本問において極値とは, 広義の極値を表すものとする.

(1) $xye^{-x^2-y^2}$ (2) $x^3 + y^3 - 3xy$ (3) $(\sqrt{x^2 + y^2} - 1)^2$ (4) $(y - x^2)(y - 2x^2)$

コメント)「ヘッシアンの値が0になる場合は, 極値を与える場合も, そうでない場合も両方あり得る」ということに注意せよ.

[5] x, y, z は正の実数で, かつ $x + y + z = a$ (定数) を満たすものとする. このとき $f(x, y, z) = x^\alpha y^\beta z^\gamma$ の最大値と, それを与える (x, y, z) を全て求めよ. ただし α, β, γ は正の定数とする.

[6] 以下は極値問題についての2人の学生の会話である。

A君 「極値問題を考えるとき、ヘッシアンを使えって講義でやったけど、よく考えたらそんなことしなくてもいいと思うんだけど。」

B君 「そうなの？」

A君 「どうせ並行移動すればいいだけだから、関数 $f(x, y)$ が原点 $(0, 0)$ で極値を取るかどうかを調べたいとするよね。ヘッシアンを使う時と同じように、 f は C^2 -級と仮定しておこう。まずグラフ $z = f(x, y)$ を考えるでしょ。それで、 xy 平面上で原点を通る直線 $y = ax$ を考えて、それを l とするよね。で、 l を通る z 軸に平行な平面で、曲面 $z = f(x, y)$ を切るでしょ。そうすると切り口に現れる曲線は、 $z = f(x, y)$ に $y = ax$ を代入したものだから、 $z = f(x, ax)$ だよな。これって x の1変数関数でしょ？ だから x の関数と思って増減表が書けるじゃん。もし $(0, 0)$ で $f(x, y)$ が極大値を取るなら、 l 上に制限した $z = f(x, ax)$ は $x = 0$ で上に凸になってなきゃいけないでしょ。これだと l の方向でしか増減を見ていないわけだけど、 a を勝手な実数にとって全部動かすことにすれば、曲面のグラフが山の頂上みたいになっているかどうか判定出来るでしょ？」

B君 「でも、それだと l が y 軸の場合を考えてないことになるよ。」

A君 「確かにね。でも、そういうときは $z = f(0, y)$ を考えれば同じことでしょ。どっちにしろ1変数の場合に帰着出来るわけだから、増減表を書いちゃえばいいわけで、ヘッシアンとかいらんと思うけどね。」

B君 「本当かなあ？」

A君 「だって、 $z = f(x, y)$ のグラフが $(0, 0)$ で山の頂上みたいな形をしているってことは、どんな平面で切っても切り口が上に凸になるってことでしょ？ だったら問題ないと思うけど。」

B君 「でも、そんなこと先生も言ってなかったし、テキストにも書いてないよ。」

A君 「え？ だって、どんな方向から切ったって極大なんだよ？ それでグラフが山の頂上みたいになってないことなんて、あり得ないでしょ？」

B君 「そう言われると正しそうな気もするけど、本当なのかなあ？ もし本当なら、ちゃんと証明出来るはずだよな。どうやるんだろう？」

A君の言っていることは正しいか？ まずA君の主張を数学的に定式化した上で、A君の主張が正しい場合にはそれを証明せよ。A君の主張が間違っている場合には、どこが間違っているのかを指摘し、その理由を反例を挙げて説明せよ。