２０１１年度冬学期数学IA補足プリント（その１）

（１１月２日配布）

担当：斉藤　義久

● 定理4.6.4は講義中に証明しなかったので，プリントで補う．

準備

夏学期に証明した次の定理を思い出そう．

定理1.2.9（数列に対するコーシーの判定条件）

数列 $\{a_n\}$ に対し，次の２条件は同値である．

(a) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n \in \mathbb{R}$ が存在する．

(b) 任意の $\varepsilon > 0$ に対して，ある $N > 0$ が存在して，

$$m, n > N \quad \Rightarrow \quad |a_m - a_n| < \varepsilon.$$

定義 上の条件の (b) を満たす数列を**コーシー列**という．

定理１（関数に対するコーシーの判定条件）

関数 $f(x)$ に対し，次の２条件は同値である．

(a) $\displaystyle\lim_{x\to a} f(x) \in \mathbb{R}$ が存在する．

(b) 任意の $\varepsilon > 0$ に対して，ある $\delta > 0$ が存在して，

$$0 < |x-a|,\ |y-a| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

（証明）(a)⇒(b) $\displaystyle\lim_{x\to a} f(x) = A$ とすると，任意の $\varepsilon > 0$ に対して，ある $\delta > 0$ が存在して，

$$0 < |x-a|,\ |y-a| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - A| < \frac{\varepsilon}{2},\ |f(y) - A| < \frac{\varepsilon}{2}$$

とできる．このとき

$$|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - A| + |f(y) - A| < \varepsilon.$$

(b)⇒(a) a に収束する勝手な数列 $\{a_n\}$ をとる．収束する数列はコーシー列である（定理1.2.9）から，$\delta > 0$ に対して $N > 0$ が存在して，

$$m, n > N \quad \Rightarrow \quad |a_m - a_n| < \delta.$$

このとき，仮定から

$$|f(a_m) - f(a_n)| < \varepsilon.$$

すなわち，数列 $\{f(a_n)\}$ はコーシー列である．定理 1.2.9 を再度用いて，$\{f(a_n)\}$ は収束することがわかる．$\{a_n\}$ は a に収束する勝手な数列だったので，夏学期の講義中の定理 1.4.4 より $\lim_{x\to a} f(x) \in \mathbb{R}$ が存在する． $\square$

以上の準備の下に，定理 4.6.4 を証明しよう．

定理 4.6.4（広義積分の収束判定条件）

$[a,b)$ における広義積分 $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ に対し，次の 2 条件は同値.

(a) $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ は収束する．

(b) 任意の $\varepsilon > 0$ に対して，ある $a < c < b$ が存在して，

$$c < u < v < b \quad \Rightarrow \quad \left|\int_u^v f(x)dx\right| < \varepsilon.$$

（証明）(a)⇒(b) $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = I$ とすると，任意の $\varepsilon > 0$ に対して，ある $\delta > 0$ が存在して，

$$0 < b - v < b - u < \delta \quad \Rightarrow \quad \left|\int_a^u f(x)dx - I\right| < \frac{\varepsilon}{2},\ \left|\int_a^v f(x)dx - I\right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

とできる．このとき $c := b - \delta$ とおけば,

$$c < u < v < b \quad \Rightarrow \quad \left|\int_u^v f(x)dx\right| \leq \left|\int_a^u f(x)dx - I\right| + \left|\int_a^v f(x)dx - I\right| < \varepsilon.$$

(b)⇒(a) $F(t) := \displaystyle\int_a^t f(x)dx\ (a \geq t < b)$ とおく．このとき仮定 (b) は，関数 $F(t)$ に対して定理 1 の条件 (b) が成立することに他ならない．したがって定理 2 から $\displaystyle\lim_{t\to b-0} F(t) = \int_a^b f(x)dx$ が存在する． $\square$

Remark. 見比べればわかるように，これら 3 つの主張は全て同系統のものである．その意味で定理 4.6.4 は『広義積分に関するコーシーの判定条件』と呼ばれることもある．

積分計算に関する演習問題

- 以下において n, m は正の整数を、α, β は実数を表すものとする.

[1] 次の不定積分を求めよ.

(1) $\displaystyle\int \frac{1-\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}}dx$ (2) $\displaystyle\int \frac{x^3}{x^8+1}dx$ (3) $\displaystyle\int \frac{1}{(e^x+e^{-x})^4}dx$

(4) $\displaystyle\int \frac{e^{4x}}{e^{2x}-1}dx$ (5) $\displaystyle\int x\log(x^2+1)dx$ (6) $\displaystyle\int \frac{x^2+x+1}{(x-1)^2(x-2)}dx$

(7) $\displaystyle\int \frac{dx}{(x-1)^2(x^2+1)^2}$ (8) $\displaystyle\int \frac{dx}{(x^2+4)(x^2+9)}$ (9) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^3-1}$

(10) $\displaystyle\int x^2e^x dx$ (11) $\displaystyle\int x^2\cos x dx$ (12) $\displaystyle\int e^{\alpha x}\sin\beta x dx$ $(\alpha, \beta \neq 0)$

(13) $\displaystyle\int \sin^n x\cos x dx$ (14) $\displaystyle\int \tan^n x dx$ (15) $\displaystyle\int (x^2+1)^n x dx$

(16) $\displaystyle\int x^n\sin x dx$ (17) $\displaystyle\int \cos^n x dx$ (18) $\displaystyle\int (\log x)^n dx$

(19) $\displaystyle\int \frac{1}{(x^2+\alpha^2)^n}dx$ $(\alpha \neq 0)$ (20) $\displaystyle\int \frac{1}{(x-\alpha)^m(x-\beta)^n}dx$ $(\alpha \neq \beta)$

(21) $\displaystyle\int \frac{1}{x^{2m-1}(x^2+a)^n}dx$ (22) $\displaystyle\int \frac{\cos^2 x}{\sin^4 x}dx$ (23) $\displaystyle\int \frac{2-\sin x}{2+\cos x}dx$

(24) $\displaystyle\int \frac{1}{3+5\sin x}dx$ (25) $\displaystyle\int \frac{1}{2+\tan^2 x}dx$ (26) $\displaystyle\int \frac{1}{\cos^3 x}dx$

(27) $\displaystyle\int \frac{1+\cos x}{1+\sin x}dx$ (28) $\displaystyle\int \frac{1}{x}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}dx$ (29) $\displaystyle\int (1-x^2)^{-5/2}dx$

(30) $\displaystyle\int (x+\sqrt{x^2+1})^n dx$ $(n \geq 2)$ (31) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x^2-1}}{x^4}dx$ $(x > 1)$

(32) $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$ (33) $\displaystyle\int \frac{x^2}{(1-x^2)^{3/2}}dx$ (34) $\displaystyle\int \frac{x+1}{(x^2+4)\sqrt{x^2+9}}dx$

(35) $\displaystyle\int \frac{dx}{(x+2)\sqrt{x^2+x+1}}$ (36) $\displaystyle\int \frac{x+1}{\sqrt{x^2+x+1}}dx$ (37) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^{1/2}+x^{1/3}}$

(38) $\displaystyle\int \frac{x^2}{(x\sin x+\cos x)^2}dx$ (39) $\displaystyle\int \frac{1}{x\sqrt{1+x^n}}dx$ (40) $\displaystyle\int \frac{e^x(x^2+1)}{(x+1)^2}dx$

[2] 次の定積分の値を求めよ（広義積分になっていることもある）.

(1) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \sin mx \sin nx dx$ (2) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \sin mx \cos nx dx$ (3) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \cos mx \cos nx dx$

(4) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^n x dx$ (5) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos^n x dx$ (6) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{dx}{a^2\sin^2 x + b^2\cos^2 x}$ $(a, b > 0)$

(7) $\displaystyle\int_0^{\infty} x^n e^{-x} dx$ (8) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{x}{1+\cos x} dx$ (9) $\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-x}\cos^2 x dx$

(10) $\displaystyle\int_0^{1} \frac{x^n}{\sqrt{1-x^2}} dx$ (11) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\log x}{1+x^2} dx$ (12) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^n}$

(13) $\displaystyle\int_0^{1} x^2 \mathrm{Arcsin} x dx$ (14) $\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-ax}\cos bx dx$ $(a, b > 0)$ (15) $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\sin nx}{\sin x} dx$

(16) $\displaystyle\int_0^{1} \frac{\log(1+x)}{1+x^2} dx$ (17) $\displaystyle\int_0^{1} \frac{\log x}{\sqrt{1-x^2}} dx$ (18) $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{dx}{1+a\cos x} dx$ $(|a| < 1)$

(19) $\displaystyle\int_0^{1} \frac{x\mathrm{Arcsin} x}{\sqrt{1-x^2}} dx$ (20) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{e^{ax}+e^{-ax}}$ $(a > 0)$ (21) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \log(\sin x) dx$

(22) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin x \log(\sin x) dx$ (23) $\displaystyle\int_0^{1} \frac{\mathrm{Arcsin} x}{x} dx$ (24) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx$

(25) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx$

○ 予告

中間試験（１２月１４日に実施予定）では積分の計算問題を出題する予定だが，今回の演習問題の中からしか出題しない．