

## 2011年度数学IA冬学期中間試験問題

(12月14日, 16:20~17:50(90分), 持ち込み不可)

担当: 斉藤 義久

- 答案は日本語の文章で作成すること。単なる数式の羅列であったり, 矢印等の記号を多用しすぎて意味不明になっている場合には, 日本語の文章と認めない場合がある。
- 字が汚くて読めない場合, 仮に正しいことが書いてあったとしても『判読不能』と見なして採点しない可能性があるため, 注意すること。

[1] 次の不定積分を求めよ。ただし積分定数は無視して良い。

$$(1) \int x^2 e^x dx \quad (2) \int \frac{dx}{x^3 - 1}$$

[2] 次の積分が広義積分かどうか調べ, 広義積分でない (= 普通の積分である) 場合には, その値を求めよ。また広義積分である場合には, 収束・発散を判定し, 収束するならばその値を求めよ。

$$(1) \int_0^\pi \frac{\sin nx}{\sin x} dx \quad (n \text{ は正の整数}) \quad (2) \int_0^1 \frac{x \operatorname{Arctan} x}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

[3] 広義積分  $\int_0^\infty \frac{\log x}{1+x^2} dx$  の収束・発散を判定し, 収束するならばその値を求めよ。

[4] リーマン積分の定義にしたがって,  $\int_0^a x^2 dx = \frac{a^3}{3}$  を示せ。ただし  $a > 0$  とする。

[5]  $f(x)$  を閉区間  $[a, b]$  上の有界な可積分関数とし,  $[a, b]$  上の関数  $F(x)$  を

$$F(x) := \int_a^x f(t) dt \quad (a \leq x \leq b)$$

と定める。このとき以下に述べることは正しいか? 正しいければ証明し, 間違っているなら反例を挙げて説明せよ。

- (1)  $F(x)$  は  $(a, b)$  上の連続関数である。
- (2)  $F(x)$  は  $(a, b)$  で微分可能である。
- (3)  $F(x)$  が  $(a, b)$  で微分可能ならば,  $F(x)$  は  $f(x)$  の原始関数である。

[6] 非負整数  $n$  に対し  $P_n(x) := \frac{d^n}{dx^n} (1-x^2)^n$  とおく。  $\int_{-1}^1 P_n(x)^2 dx$  を求めよ。