講義の補足プリント

YOSHIHISA SAITO

3.2. Krull-Schmidt 型定理.

Theorem 3.2.1 (Kurll-Remak-Schmidt)**.**
$\mathbf{V}=(V,f)$ を $\Gamma=(I,\Omega)$ の表現とするとき,（同型を除いて）一意的に直既約表現の直和に分解出来る．すなわち，必ず

$$\mathbf{V}=\mathbf{V}^{(1)}\oplus\mathbf{V}^{(2)}\oplus\cdots\oplus\mathbf{V}^{(m)},\qquad \mathbf{V}^{(k)}\text{は直既約 }(1\leq k\leq m) \tag{1}$$

と分解出来て，かつ

$$\mathbf{V}=\mathbf{V}^{(1)}\oplus\mathbf{V}^{(2)}\oplus\cdots\oplus\mathbf{V}^{(m)}=\mathbf{V}'^{(1)}\oplus\mathbf{V}'^{(2)}\oplus\cdots\oplus\mathbf{V}'^{(n)} \tag{2}$$

と２通りに直既約分解出来たとすると，$n=m$ で，しかも番号付けを適当に入れ替えることで

$$\mathbf{V}^{(k)}\cong\mathbf{V}'^{(k)}\quad(1\leq k\leq m)$$

と出来る．

Proof of (1). $\dim_{\mathbb{C}}V$ に関する帰納法.

$\dim_{\mathbb{C}}V=1$ のとき，ベクトル空間として V の部分空間は非自明なものしかない．したがって $\mathbf{V}$ 自身既約で，したがって直既約.

$\dim_{\mathbb{C}}W<k$ なる任意の $\mathbf{W}=(W,g)$ で主張が正しいと仮定し，$\dim_{\mathbb{C}}V=k$ なる $\mathbf{V}=(V,f)$ を考える．$\mathbf{V}$ が直既約の場合は (1) は明らかだから，直既約でないと仮定して良い．このとき，非自明な部分表現 $\mathbf{V}'=(V',f')$，$\mathbf{V}"=(V",f")$ が存在して，

$$\mathbf{V}=\mathbf{V}'\oplus\mathbf{V}"$$

と書ける．$\dim_{\mathbb{C}}V',\dim_{\mathbb{C}}V"<k$ だから帰納法の仮定から $\mathbf{V}'$ および $\mathbf{V}"$ は直既約表現の直和で書ける．したがって，$\mathbf{V}$ も直既約表現の直和で書ける．すなわち (1) が成立する． □

3.3. (2) の証明のための準備.

Proposition 3.3.1.
$\mathbf{V}=(V,f)$ を $\Gamma=(I,\Omega)$ の直既約表現とする．
(1) $\varphi:\mathbf{V}\to\mathbf{V}$ とすると，φ は同型であるか，ベキ零であるかのいずれかである．ただし φ がベキ零であるとは，自然数 l が存在して $\varphi^l=0$ が成り立つことを言う．
(2) $\varphi:\mathbf{V}\to\mathbf{V}$, $\psi:\mathbf{V}\to\mathbf{V}$ とする．このとき $\varphi+\psi:\mathbf{V}\to\mathbf{V}$ が同型であれば，φ と ψ のうち少なくとも一方は同型である．

Proof. (1) φ を $\varphi:V\to V$($\mathbb{C}$-linear map) とみると，

$$V\supset\mathrm{Im}(\varphi)\supset\mathrm{Im}(\varphi^2)\supset\cdots\supset\{0\},$$

$$\{0\}\subset\mathrm{Ker}(\varphi)\subset\mathrm{Ker}(\varphi^2)\subset\cdots\subset V$$

Date: June 10, 2011.

が成り立つ．V は有限次元だから，自然数 l が存在して，

$$\begin{cases} \mathrm{Im}(\varphi^l) = \mathrm{Im}(\varphi^{l+1}) = \cdots \\ \mathrm{Ker}(\varphi^l) = \mathrm{Ker}(\varphi^{l+1}) = \cdots \end{cases}$$

となる．このとき Γ の表現として

$$\mathbf{V} = \Big(\mathrm{Im}(\varphi^l), f|_{\mathrm{Im}(\varphi^l)}\Big) \oplus \Big(\mathrm{Ker}(\varphi^l), f|_{\mathrm{Ker}(\varphi^l)}\Big)$$

と直和分解する．

($\because$) <u>step 1</u>：$V = \mathrm{Im}(\varphi^l) \oplus \mathrm{Ker}(\varphi^l)$ であること：

$v \in V$ とすると，$\varphi^l(v) \in \mathrm{Im}(\varphi^l) = \mathrm{Im}(\varphi^{2l})$．よって，$v' \in V$ が存在して，$\varphi^l(v) = \varphi^{2l}(v')$．このとき $\varphi^l(v - \varphi^l(v')) = 0$ であるので，$w := v - \varphi^l(v') \in \mathrm{Ker}(\varphi^l)$．したがって

$$v = \varphi^l(v') + w \in \mathrm{Im}(\varphi^l) + \mathrm{Ker}(\varphi^l).$$

すなわち

$$V = \mathrm{Im}(\varphi^l) + \mathrm{Ker}(\varphi^l).$$

$v \in \mathrm{Im}(\varphi^l) \cap \mathrm{Ker}(\varphi^l)$ とすると，$v' \in V$ が存在して $v = \varphi^l(v')$．他方，$\varphi^l(v) = 0$ でもある．よって $\varphi^{2l}(v') = 0$．$\mathrm{Ker}(\varphi^{2l}) = \mathrm{Ker}(\varphi^l)$ であるから，$v' \in \mathrm{Ker}(\varphi^l)$．ゆえに $v = \varphi^l(v') = 0$．したがって $\mathrm{Im}(\varphi^l) \cap \mathrm{Ker}(\varphi^l) = \{0\}$. 以上より

$$V = \mathrm{Im}(\varphi^l) \oplus \mathrm{Ker}(\varphi^l)$$

が示された.

<u>step 2</u>：$\Big(\mathrm{Ker}(\varphi^l), f|_{\mathrm{Ker}(\varphi^l)}\Big)$ が $\mathbf{V} = (V, f)$ の部分表現であること：

$\varphi = (\varphi_i)_{i \in I}$ に注意しよう．I-graded vector space $\mathrm{Ker}(\varphi^l)$ の第 i 成分を $\mathrm{Ker}(\varphi^l)_i$ と書くことにすれば,

$$\mathrm{Ker}(\varphi^l) = \oplus_{i \in I} \mathrm{Ker}(\varphi^l)_i = \oplus_{i \in I} \mathrm{Ker}(\varphi_i^l).$$

$v_{\mathrm{out}(\tau)} \in \mathrm{Ker}(\varphi^l_{\mathrm{out}(\tau)})$ とすると，φ が quiver の表現の射であることから,

$$\varphi^l_{\mathrm{in}(\tau)}\big(f_\tau(v_{\mathrm{out}(\tau)})\big) = f_\tau\big(\varphi^l_{\mathrm{out}(\tau)}(v_{\mathrm{out}(\tau)})\big) = 0.$$

すなわち

$$f_\tau : \mathrm{Ker}(\varphi^l_{\mathrm{out}(\tau)}) \to \mathrm{Ker}(\varphi^l_{\mathrm{in}(\tau)}).$$

これは $\Big(\mathrm{Ker}(\varphi^l), f|_{\mathrm{Ker}(\varphi^l)}\Big)$ が $\mathbf{V} = (V, f)$ の部分表現であることに他ならない.

<u>step 3</u>：$\Big(\mathrm{Im}(\varphi^l), f|_{\mathrm{Im}(\varphi^l)}\Big)$ が $\mathbf{V} = (V, f)$ の部分表現であること：

step 2 と同様なので省略.

<u>final step</u>：$V = \mathrm{Im}(\varphi^l) \oplus \mathrm{Ker}(\varphi^l)$ だから，linear map として

$$f = f|_{\mathrm{Im}(\varphi^l)} \oplus f|_{\mathrm{Ker}(\varphi^l)}$$

は明らかである．したがって

$$\mathbf{V} = \Big(\mathrm{Im}(\varphi^l), f|_{\mathrm{Im}(\varphi^l)}\Big) \oplus \Big(\mathrm{Ker}(\varphi^l), f|_{\mathrm{Ker}(\varphi^l)}\Big)$$

が成り立つ. □

$\mathbf{V}$ は直既約だったので,

$$\mathrm{Im}(\varphi^l) = \{0\} \quad \text{or} \quad \mathrm{Ker}(\varphi^l) = \{0\}.$$

前者は φ がベキ零であることを意味し，後者は φ が同型であることを意味する．

(2) $\nu := \varphi + \psi$ とおくと，仮定から ν は同型なので ν^{-1} が存在する．よって

$$\mathrm{id}_V = \nu^{-1} \circ \nu = \nu^{-1} \circ \varphi + \nu^{-1} \circ \psi.$$

$$\varphi \text{ が同型 } \Leftrightarrow \nu^{-1} \circ \varphi \text{ 同型}, \qquad \psi \text{ が同型 } \Leftrightarrow \nu^{-1} \circ \psi \text{ が同型}$$

だから，最初から $\nu = \mathrm{id}_V$ として良い．このとき

$$\varphi \circ \phi = \varphi \circ (\mathrm{id}_V - \varphi) = (\mathrm{id}_V - \varphi) \circ \varphi = \psi \circ \varphi.$$

よって，任意の $m \in \mathbb{Z}_{>0}$ に対し，

$$(\mathrm{id}_V)^m = (\varphi + \psi)^m = \sum_{r=0}^{m} \begin{pmatrix} m \\ r \end{pmatrix} \varphi^r \phi^{m-r}. \tag{$*$}$$

仮に φ と ψ がともにベキ零であるとすると，自然数 l が存在して $\varphi^l = 0$ かつ $\psi^l = 0$．このとき $(*)$ より，

$$(\mathrm{id}_V)^{2l} = 0$$

となるが，これは矛盾． □

Γ の表現 $\mathbf{V}$ が

$$\mathbf{V} = \mathbf{V}' \oplus \mathbf{V}''$$

なる直和分解を持っていたとしよう．このとき，

$$\mathbf{V}/\mathbf{V}'' \cong \mathbf{V}', \qquad \mathbf{V}/\mathbf{V}' \cong \mathbf{V}''$$

は明らかであろう．

Definition 3.3.2. 自然な全射

$$\pi_{\mathbf{V}'} : \mathbf{V} \to \mathbf{V}/\mathbf{V}'' \cong \mathbf{V}', \qquad \pi_{\mathbf{V}''} : \mathbf{V} \to \mathbf{V}/\mathbf{V}' \cong \mathbf{V}''$$

を射影子（*projector*）という．

次の補題は定義からすぐに従う．

Lemma 3.3.3. (1) $\pi_{\mathbf{V}'}|_{\mathbf{V}'} = \mathrm{id}_{V'}$, $\pi_{\mathbf{V}''}|_{\mathbf{V}''} = \mathrm{id}_{V''}$.
(2) $\mathrm{id}_V = \pi_{\mathbf{V}'} \oplus \pi_{\mathbf{V}''}$.
(3) $\pi_{\mathbf{V}'}^2 = \pi_{\mathbf{V}'}$, $\pi_{\mathbf{V}''}^2 = \pi_{\mathbf{V}''}$.
(4) $\pi_{\mathbf{V}'} \circ \pi_{\mathbf{V}''} = \pi_{\mathbf{V}''} \circ \pi_{\mathbf{V}'} = 0$.

3.4. **Theorem 3.2.1 (2) の証明.**

以上の準備のもとに Theorem 3.2.1 (2) を証明しよう．

Proof. 長いのでいくつかの step に分ける．

step 1：Γ の表現 $\mathbf{V}$ が 2 通りの直既約分解

$$\begin{aligned} \mathbf{V} &= \mathbf{V}^{(1)} \oplus \mathbf{V}^{(2)} \oplus \cdots \oplus \mathbf{V}^{(m)} \\ &= \mathbf{V}'^{(1)} \oplus \mathbf{V}'^{(2)} \oplus \cdots \oplus \mathbf{V}'^{(n)} \end{aligned}$$

を持っていたとする．また

$$\mathbf{W} := \mathbf{V}^{(2)} \oplus \cdots \oplus \mathbf{V}^{(m)} \quad (\Leftrightarrow \ \mathbf{V} = \mathbf{V}^{(1)} \oplus \mathbf{W})$$

とし,

$$\pi_1 := \pi_{\mathbf{V}^{(1)}}, \quad \pi_W := \pi_{\mathbf{W}}, \quad \pi'_l := \pi_{\mathbf{V}'^{(l)}}\ (1 \le l \le n)$$

と書く．Lemma 3.3.3 より,

$$\pi_1|_{\mathbf{V}^{(1)}} = \mathrm{id}_{V^{(1)}}, \quad \pi_W|_{\mathbf{W}} = \mathrm{id}_W, \quad \pi'_l|_{\mathbf{V}'^{(l)}} = \mathrm{id}_{V'^{(l)}}\ (1 \le l \le n),$$
$$\mathrm{id}_V = \pi_1 \oplus \pi_W = \pi'_1 \oplus \cdots \oplus \pi'_n,$$
$$\pi_1^2 = \pi_1, \quad \pi_W^2 = \pi_W, \quad (\pi'_l)^2 = \pi'_l\ (1 \le l \le n),$$
$$\pi_1 \circ \pi_W = \pi_W \circ \pi_1 = 0, \quad \pi'_k \circ \pi'_l = \pi'_l \circ \pi'_k = 0\ (1 \le k \ne l \le n).$$

したがって

$$\pi_1 = \pi_1 \circ \mathrm{id}_V = \pi_1 \circ \pi'_1 \oplus \cdots \oplus \pi_1 \circ \pi'_n. \qquad (**)$$

ここで

$$E_l := \pi_1 \circ \pi'_l|_{\mathbf{V}^{(1)}} : \mathbf{V}^{(1)} \xrightarrow{\pi'_l} \mathbf{V}'^{(l)} \xrightarrow{\pi_1} \mathbf{V}^{(1)} \quad (1 \le l \le n)$$

を考える．$(**)$ より

$$\mathrm{id}_{V^{(1)}} = \pi_1|_{\mathbf{V}^{(1)}} = E_1 + \cdots + E_n.$$

$\mathbf{V}^{(1)}$ は直既約だから Proposition 3.3.1 の (2) より，ある l_0 が存在して $E_{l_0} : \mathbf{V}^{(1)} \to \mathbf{V}^{(1)}$ は同型．番号を付け替えて $l_0 = 1$ としてよいので，結局

$$E_1 = \pi_1 \circ \pi'_1|_{\mathbf{V}^{(1)}} : \mathbf{V}^{(1)} \to \mathbf{V}^{(1)} \quad \text{は同型}$$

となる．

<u>step 2</u>：

$$\begin{aligned}\mathbf{V}^{(1)} &= E_1(\mathbf{V}^{(1)}) \quad (\because\ \text{step 1})\\ &= \pi_1 \circ \pi'_1(\mathbf{V}^{(1)})\\ &\subset \pi_1(\mathbf{V}'^{(1)})\\ &\subset \mathbf{V}^{(1)}.\end{aligned}$$

よって上の $\subset$ は全て等号で,

$$\mathbf{V}^{(1)} = \pi_1(\mathbf{V}'^{(1)}) = \pi_1 \circ \pi'_1(\mathbf{V}^{(1)}).$$

第 2 の等号の両辺に π'_1 を施して,

$$\pi'_1 \circ \pi_1(\mathbf{V}'^{(1)}) = \pi'_1 \circ \pi_1 \circ \pi'_1(\mathbf{V}^{(1)}). \qquad (***)$$

ゆえに

$$\begin{aligned}\left(\pi'_1 \circ \pi_1\right)^2(\mathbf{V}'^{(1)}) &= \pi'_1 \circ \pi_1 \circ \pi'_1 \circ \pi_1(\mathbf{V}'^{(1)})\\ &= \pi'_1 \circ \pi_1 \circ \pi'_1(\mathbf{V}^{(1)}) \quad (\because\ \mathbf{V}^{(1)}\pi_1(\mathbf{V}'^{(1)}))\\ &= \pi'_1 \circ \pi_1(\mathbf{V}'^{(1)}) \quad (\because\ (***))\\ &= \pi'_1(\mathbf{V}^{(1)}) \quad (\because\ \mathbf{V}^{(1)}\pi_1(\mathbf{V}'^{(1)}))\\ &\ne \mathbf{0} \quad (\because\ E_1 \text{は isom.})\end{aligned}$$

同様に $\left(\pi'_1 \circ \pi_1\right)^k(\mathbf{V}'^{(1)}) \ne \mathbf{0}$．すなわち $\pi'_1 \circ \pi_1|_{\mathbf{V}'^{(1)}}$ はベキ零でない．Proposition 3.3.1 (1) より，これは isom で,

$$\pi'_1 \circ \pi_1(\mathbf{V}'^{(1)}) = \mathbf{V}'^{(1)}.$$

したがって

$$\pi'_1(\mathbf{V}^{(1)}) = \pi'_1 \circ \pi_1(\mathbf{V}'^{(1)}) = \mathbf{V}'^{(1)}.$$

<u>step 3</u>：$\mu_1 := \pi'_1 \circ \pi_1 + \pi_w$ とおくと，これは $\mathbf{V}$ から $\mathbf{V}$ への isomorphism である．

($\because$) μ_1 が quiver の射であることは明らかだから，線形写像として $\mu_1 : V \to V$ が全単射であることを言えば十分．さらに V は有限次元だから，μ_1 が単射であることを言えば良い．
　$\mu_1(v) = 0$ $(v \in V)$ とすると，

$$\begin{aligned} 0 &= \pi_1 \circ \mu_1(v) \\ &= \pi_1(\pi_1' \circ \pi_1 + \pi_w)(v) \\ &= \pi_1 \circ \pi_1'\bigl(\pi_1(v)\bigr) \quad (\because \pi_1 \circ \pi_W = 0) \\ &= E_1(\pi_1(v)) \quad (\because\ \pi_1(v) \in V^{(1)}). \end{aligned}$$

$E_1 : V^{(1)} \to V^{(1)}$ は同型だから，$\pi_1(v) = 0$. したがって

$$0 = \mu_1(v) = (\pi_1' \circ \pi_1 + \pi_w)(v) = \pi_W(v).$$

$\mathrm{id}_V = \pi_1 \oplus \pi_W$ だったので，$v = 0$. ゆえに μ_1 は単射である． $\square$

step 4：まず

$$\mu_1(\mathbf{V}^{(1)}) = (\pi_1' \circ \pi_1 + \pi_w)(\mathbf{V}^{(1)}) = \pi_1' \circ \pi_1(\mathbf{V}^{(1)}) = \mathbf{V}'^{(1)}$$

である．また $w \in W_1$ として，

$$\mu_1(w) = (\pi_1' \circ \pi_1 + \pi_w)(w) = \pi_W(w) = w,$$

すなわち

$$\mu_1|_{\mathbf{W}} = \mathrm{id}_{\mathbf{W}}$$

である．したがって

$$\mathbf{V} = \mu_1(\mathbf{V}) = \mu_1(\mathbf{V}^{(1)} \oplus \mathbf{W}) = \mu_1(\mathbf{V}^{(1)}) \oplus \mathbf{W} = \mathbf{V}'^{(1)} \oplus \mathbf{W}.$$

ゆえに，

$$\mathbf{V}/\mathbf{V}'^{(1)} \cong \mathbf{W}.$$

また，$\mathbf{V} = \mathbf{V}'^{(1)} \oplus \mathbf{V}'^{(2)} \oplus \cdots \oplus \mathbf{V}'^{(n)}$ であったので，

$$\mathbf{V}/\mathbf{V}'^{(1)} \cong \mathbf{V}'^{(2)} \oplus \cdots \oplus \mathbf{V}'^{(n)}.$$

以上より

$$\mathbf{V}^{(1)} \cong \mathbf{V}'^{(1)} \quad \text{かつ} \quad \mathbf{W} \cong \mathbf{V}'^{(2)} \oplus \cdots \oplus \mathbf{V}'^{(n)}.$$

finial step：$\mathbf{W}$ を $\mathbf{V}$ と思って同じことを繰り返すと，

$$n = m \quad \text{かつ} \quad \mathbf{V}^{(k)} \cong \mathbf{V}'^{(k)} \ (1 \leq \forall k \leq m)$$

が従う．これで Theorem 3.2.1 (2) が示された． $\square$