２０１１年度数学IA小テスト（第９回）

（１１月１４日配布）

担当：斉藤　義久

[1] 次の広義積分の収束，発散を調べよ．ただし α, β は正の実数とする．

(1) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\log x}{1-x}dx$　　(2) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt[\beta]{x^\alpha+1}}$　　(3) $\displaystyle\int_a^\infty \frac{dx}{x^\alpha(\log x)^\beta}$　$(a>1)$

[2] 積分 $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \log\sin x dx$ の値を求める問題に関して，次のような解答があった．この解答には間違いがあるのだが，

(1) どこが間違っているかを指摘し，

(2) 正しく修正せよ．

（解答） 求める積分を I とする．$\sin(\pi-x)=\sin x$ であるので，$t=\pi-x$ と変数変換すると，

$$I=\int_\pi^{\pi/2}\log\sin(\pi-t)(-1)dt=\int_{\pi/2}^{\pi}\log\sin tdt.$$

また，$t=\pi/2-x$ に変数変換した場合は，$\sin(\pi/2-x)=\cos x$ より

$$I=\int_{\pi/2}^{0}\log\sin(\pi/2-t)(-1)dt=\int_0^{\pi/2}\log\cos tdt.$$

を得る．したがって，

$$\begin{aligned}
I&=\frac{1}{2}\int_0^\pi \log\sin xdx\\
&=\int_0^{\pi/2}\log\sin 2tdt \quad (x=2t)\\
&=\int_0^{\pi/2}\log(2\sin t\cos t)dt\\
&=\int_0^{\pi/2}\big(\log 2+\log\sin t+\log\cos t\big)dt\\
&=\frac{\pi}{2}\log 2+2I.
\end{aligned}$$

ゆえに，

$$I=-\frac{\pi}{2}\log 2 \quad (\text{答}).$$

[3] $H_n(x)$ を次で定義する．

$$H_n(x):=(-1)^n e^{x^2}\frac{d^n}{dx^n}e^{-x^2} \qquad (n=0,1,2,\cdots)$$

(1) $H_n(x)$ は n 次多項式であることを証明せよ．

(2) 次の等式を証明せよ．

$$\int_{-\infty}^{\infty} H_m(x)H_n(x)e^{-x^2}dx = \begin{cases} 2^n n!\sqrt{\pi} & (m=n), \\ 0 & (m \neq n). \end{cases}$$

○ 発展問題

$x \in [0,1]$ に対し，正の整数からなる数列 $\{m_k\}_{k=1}^{\infty}$ を以下のように定義する．

(step 1) 与えられた $x \in (0,1]$ に対し，$1/2^{m_1}$ が x 以下となる最大の m_1 を取る．もし $x = 1/2^{m_1}$ である場合には，$m_k = 0$ $(k \geq 2)$ とおく．そうでない場合 $(x > 1/2^{m_1}$ のとき) は次の step に進む．

(step 2) $x - 1/2^{m_1} > 0$ を考え，$1/2^{m_2}$ が $x - 1/2^{m_1}$ 以下となる最大の a_2 を取る．$x - 1/2^{m_1} = 1/2^{m_2}$ となる場合には $m_k = 0$ $(k \geq 3)$ とおく．そうでない場合 $(x - 1/2^{m_1} > 1/2^{m_2}$ のとき) は次の step に進む．

以下これを繰り返す．また $x = 0$ のときは，$m_k = 0$ $(k = 1, 2, \cdots)$ とおく．

このようにして作った数列は，(i) 単調増加であるか，(ii) ある N が存在して m_1 から m_N までは単調増加で，$N+1$ 番目以降は 0 が並ぶか，のいずれかである．

$x \in [0,1]$ から作った数列 $\{m_k\}$ に対して，(i) の場合は小数第 m_k 位 $(k = 1, 2, \cdots)$ が 1 であるような無限小数を，(ii) の場合は小数第 m_k 位 $(k = 1, 2, \cdots, N)$ が 1 であるような有限小数を対応させる関数を $f(x)$ とする[1]．例えば

$$f\left(\frac{3}{16}\right) = 0.0011, \qquad f\left(\frac{1}{3}\right) = 0.01010101\cdots \quad (01 \text{ が無限に繰り返される})$$

である．

(1) 関数 $f(x)$ の不連続点を全て求めよ．

(2) $f(x)$ は $[0,1]$ 上（リーマン）積分可能で，

$$\int_0^1 f(x)dx = \frac{1}{18}$$

であることを示せ．

[1] これを x の 2 進小数表示という．