２０１１年度数学IA小テスト（第８回）

（１０月３１日配布）

担当：斉藤　義久

[1] 次の関数の原始関数を求めよ．

(1) $\dfrac{2x^4+x^2-3x+1}{x^3-3x^2+2x-6}$　(2) $\dfrac{1}{\sin x}$　(3) $\dfrac{1}{a+b\cos x}$ $(a\neq 0, b\neq 0)$　(4) $\sin\log x$

[2] $n \geq k$ とし，$2n-k$ 次の多項式 $P_{n,k}$ を次で定義する．

$$P_{n,k}(x) := \frac{d^k}{dx^k}(1-x^2)^n$$

(1) $n > k$ のとき $P_{n,k}(x)$ は $(1-x^2)$ で割り切れることを示せ．
（$2n-k$ 次の多項式であることは証明せずに用いて良い．）

(2) $Q_n(x) := \dfrac{1}{2^n n!}\sqrt{\dfrac{2n+1}{2}}P_{n,n}(x)$ $(n=0,1,2,\cdots)$ とするとき，次の等式を示せ．

$$\int_{-1}^{1} Q_m(x)Q_n(x)dx = \begin{cases} 1 & (m=n), \\ 0 & (m\neq n). \end{cases}$$

[3] リーマン積分の定義にしたがって，$\displaystyle\int_a^b xdx = \frac{b^2-a^2}{2}$ を示せ．

[4] $f(x)$ は $[a,b]$ で C^1-級とする．このとき次の等式を示せ．

$$\lim_{t\to\pm\infty}\int_a^b f(x)\sin tx dx = 0$$

○ <u>発展問題</u>

[4] の等式は，実は $f(x)$ が連続との仮定の下に成立する．以下の手順に従い，これを証明せよ．

(1) 閉区間 $[a,b]$ を有限個の小区間に分割し，各小区間では定数であるような関数を階段関数と呼ぶ．$[a,b]$ 上の任意の連続関数 $f(x)$ と任意の $\varepsilon > 0$ に対し，ある階段関数 $g(x)$ が存在して，次が成り立つことを示せ．

$$\sup_{a\leq x\leq b}|f(x)-g(x)| < \varepsilon$$

(2) 上問を用いて，次を示せ．

$$f(x) \text{ は } [a,b] \text{ 上連続} \quad \Rightarrow \quad \lim_{t\to\pm\infty}\int_a^b f(x)\sin tx dx = 0$$