２０１１年度数学IA小テスト（第７回）略解

（１０月１７日配布分）

担当：斉藤　義久

[1] （夏学期期末試験の [2]）３変数の極座標系 (r, θ, φ) を

$$x = r\sin\theta\cos\varphi, \qquad y = r\sin\theta\sin\varphi, \qquad z = r\cos\theta$$

で定める．このとき $\Delta = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial z^2}$ を極座標系 (r, θ, φ) で表示せよ．

[2] （夏学期期末試験の [3] の改題）２変数関数 $f(x, y) = (xy)^{2/3}$ を考える．

(1) $f(x, y)$ は原点 $(0, 0)$ で全微分可能であることを示せ．

(2) $f(x, y)$ は原点 $(0, 0)$ で C^1-級でないことを示せ．

[3] 次の関数の極値を与える点を求め，極大，極小を判定せよ．

$$2x^2 + 5y^2 + 2z^2 - 2xy - 2yz + 4zx$$

○ 発展問題

(1) $P_n(x)$ を次で与える．

$$P_n(x) := \frac{d^n}{dx^n}(x^2 - 1)^n \quad (n = 0, 1, 2, \cdots)$$

このとき，$P_n(x)$ は n 次多項式であることを示せ．

(2) 以下，非負整数 n を１つ固定する．n 次多項式

$$P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n \quad (a_i \in \mathbb{R},\ a_0 \neq 0)$$

のなかで，積分 $I = \displaystyle\int_{-1}^{1} P(x)^2 dx$ の値が最小になるものが存在することを示せ．

(3) 上問における「I を最小にする n 次多項式」は，(1) の $P_n(x)$ の定数倍であることを示せ．

注）講義では，まだ積分の具体的計算について触れていないが，本問には多項式の定積分しか出てこない．これは高校の範囲でやっていることなので，既知とした．つまり，多項式の定積分に関して高校で習ったことは，本問に限り証明せずに用いて良い．