２０１１年度数学IA小テスト（第６回）

（７月４日配布）

担当：斉藤　義久

[1] $f(x,y) = x^2 - 4x + 2y^3$ とする．

(1) $f(x,y)$ は点 $(2,1)$ において全微分可能であることを示せ．

(2) 曲面 $z = f(x,y)$ の，$(2,1,-2)$ における接平面を求めよ．

[2] 写像 $\Phi : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}^2$ を以下のように与えるとき，Φ は $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ で C^1-級であることを示せ．また，それぞれのヤコビ行列 J_Φ を求めよ．

(1) $\Phi(x,y) = \left(\log(x^2+y^2), \sqrt{x^2+y^2}\right)$　　(2) $\Phi(x,y) = \left(\dfrac{x}{x^2+y^2}, \dfrac{-y}{x^2+y^2}\right)$

[3] 次の主張は正しいか？ 正しければ証明し，間違っているなら反例を挙げよ．

主張：２変数の C^1-級関数 $f(x,y)$ に対して，次は同値である．

(a) $f_x = f_y$.

(b) １変数関数 g が存在して，$f(x,y) = g(x+y)$ と書ける．

[4] f を１変数 C^2-級関数，$z = f(r)$，$r = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$ とする．このとき次の等式を示せ．

$$\Delta z = f''(r) + \frac{n-1}{r} f'(r) \qquad \left(\text{ただし}\Delta = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}\right)$$

[5] 領域 $\{(\mathbf{x},t) \mid \mathbf{x} = (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n,\ t > 0\}$ 上の関数

$$u(\mathbf{x},t) = (2\sqrt{\pi t})^{-n} \exp\left(-\frac{||\mathbf{x}||^2}{4t}\right)$$

は，熱方程式 $u_t = \Delta u$ を満たすことを示せ．ただし $||\mathbf{x}|| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$ とする．