２０１１年度数学IA 小テスト（第５回）

（６月２０日配布）

担当：斉藤　義久

[1] $F(x,y) = e^{f(x,y)g(x,y)}$ とするとき，F の１階偏導関数を全て求めよ．ただし

$$f(x,y) = \log\sqrt{x^2+y^2}, \qquad g(x,y) = \mathrm{Arctan}\frac{y}{x}$$

とする．

[2] 次の関数の２階の偏導関数を全て求めよ．

(1) $\dfrac{xy}{x+y}$ 　　(2) $\mathrm{Arcsin}\dfrac{xy}{1+x^2+y^2}$

[3] 次の極限値を $\varepsilon - \delta$ 論法によって求めよ．もし極限値が存在しない場合は，そうであることを $\varepsilon - \delta$ 論法によって示せ．

(1) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}(x+y)\sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y}$ 　　(2) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{1-\cos(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2}$

(3) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{1-\cos(x^2+y^2)}{xy}$ 　　(4) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\sin x\sin y}{\sin^2 x+\sin^2 y}$

[4] 次の主張は正しいか？ 正しければ証明し，間違っているなら反例を挙げよ．

主張：原点 $(0,0)$ のまわりで定義された関数 $f(x,y)$ を考える．極座標で表示して $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ とするとき，任意の θ に対して，$\displaystyle\lim_{r\to+0} f(r\cos\theta, r\sin\theta)$ が（θ によらずに）同じ値に収束するならば，$f(x,y)$ は $(0,0)$ で連続である．

○ 発展問題

S を $\mathbb{R}^2$ の空でない部分集合とし，関数 $d_S : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ を次のように定める．

$$d_S(\mathbf{x}) := \inf\bigl\{\,||\mathbf{x}-\mathbf{y}||\ \bigm|\ \mathbf{y}\in S\bigr\} \qquad (\mathbf{x}\in\mathbb{R}^2).$$

ここで $||\mathbf{x}-\mathbf{y}||$ は２点 $\mathbf{x}, \mathbf{y}\in\mathbb{R}^2$ の距離を，$\inf\bigl\{\,||\mathbf{x}-\mathbf{y}||\ \bigm|\ \mathbf{y}\in S\bigr\}$ は，$\mathbb{R}$ の部分集合

$$\bigl\{\,||\mathbf{x}-\mathbf{y}||\ \bigm|\ \mathbf{y}\in S\bigr\}$$

の下限を表す．このとき，上で定めた関数 $d_S : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ は連続であることを示せ．