

2011年度数学IA小テスト(第3回)

(5月23日配布)

担当：斉藤 義久

[1] 次の極限值を求めよ．

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^n - 1}{x - 1} \quad (2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax}{\sin bx} \quad (3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3} \quad (4) \lim_{x \rightarrow 0} (1 + ax)^{1/x}$$

注) 今回は定理 1.3.2 を用いてよい．

[2] $P(x)$ を奇数次の多項式とする．このとき，方程式 $P(x) = 0$ は少なくとも1つ実数解を持つことを示せ．

[3] 集合 S を以下のように定める．

$$S = \left\{ \frac{1}{m} - \frac{1}{n} \mid m, n \text{ は正の整数} \right\}$$

(1) S には最大値，最小値が存在しないことを示せ．

(2) S の上限および下限を求めよ．

[4] (1) $x_1 < x_2$ で， x_1 は有理数， x_2 は無理数とする．このとき $x_1 < p < x_2$ なる有理数 p が存在することを示せ．

(2) a を実数とするととき， a に収束する有理数列が存在することを示せ．

○ 発展問題

\mathbb{R} 上で定義される関数 $f(x)$ は次を満たすとする．

- $f(x)$ は \mathbb{R} 上連続である．
- 任意の $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ に対し， $f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2)$.

このような条件を満たす $f(x)$ は， $f(x) = ax$ (a は定数) に限ることを示せ．