

2011年度数学IA小テスト (第2回)

(5月9日)

担当：齊藤 義久

[1] 次の関数 $f(x)$ が指定された定義域 X で連続であることを示せ.

(1) $f(x) = x^2, X = \mathbb{R}$ (2) $f(x) = \cos x, X = \mathbb{R}$

(3) $f(x) = 1/x, X$ は正の実数全体 (4) $f(x) = \sqrt{x}, X$ は正の実数全体

注) 定理 1.3.2 を用いずに証明すること.

[2] 0 以外の実数全体上で定義される関数

$$f(x) = \frac{|x|}{x} \quad (x \neq 0)$$

を考え, さらに $x = 0$ における値を適当に定めて \mathbb{R} 上で定義される関数に拡張する. このとき, $f(0)$ の値をどのように定めたとしても, $f(x)$ は $x = 0$ で不連続であることを示せ.

[3] $X = [0, 1]$ とする. X 上の単調増加関数であって, 不連続点が無限個あるようなものの例を作れ.

注) 単に例を作るだけではなく, 作った後, それが不連続点を無限個持つことを証明すること.

○ 発展問題

\mathbb{R} 上の関数 $f(x)$ を次のように定める.

- x が無理数のとき: $f(x) = 0$ とおく.
- x が有理数のとき: まず x を既約有理数で $x = \frac{p}{q}$ ($q > 0$) と表示し¹, $f(x) = \frac{1}{q}$ と定める.

(1) a が無理数のとき, $f(x)$ は $x = a$ で連続であることを示せ.

(2) a が有理数のとき, $f(x)$ は $x = a$ で不連続であることを示せ.

¹有理数 $\frac{p}{q}$ が既約であるとは, p と q が互いに素であることをいう.