２０１１年度数学IA小テスト（第１３回）

（１月３０日配布）

担当：斉藤　義久

[1] 次のべき級数の収束半径を求めよ。

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})x^n$　(2) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(2n)!}x^n$　(3) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{n+1}x^{3n}$

[2] 級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ に対し，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ が収束するとき，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ は絶対収束するという.

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ が絶対収束するならば，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2$ は収束することを示せ.

(2) 上の逆は成り立つか？成り立つなら証明し，そうでないなら反例を挙げよ.

[3] $f(x)=\log(x+\sqrt{1+x^2})$ の原点におけるテイラー展開を求めよ.

ヒント）一般２項展開 $(1+x)^{\alpha}=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\binom{\alpha}{n}x^n$ を用いいてみよ.

[4] (1) 次の定積分の値を求めよ.

$$\int_0^1\frac{dx}{x^3+1}$$

(2) 次の等式を示せ.

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3n+1}=\frac{\pi}{3\sqrt{3}}+\frac{1}{3}\log 2$$

○ 発展問題

次の等式を示せ.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$$