２０１１年度数学IA小テスト（第１２回）

（１月１６日配布）

担当：斉藤　義久

[1] $a>0$ とする．３次元空間内で，半径 a の球と半径 $a/2$ の円柱の共通部分の体積を求めよ．ただし，球の中心は円柱の表面上にあるとする．

[2] X を原点を中心とする半径 $a>0$ の球（の内部）とするとき，積分

$$\int\int\int_X \log(x^2+y^2+z^2)dxdydz$$

の値を求めよ．

[3] ２変数関数 $f(x,y)$ を次で与える．

$$f(x,y)=e^{-x}(x\sin y-y\cos y).$$

このとき $\mathbb{R}^2$ 内の任意の区分的になめらかな閉曲線 C に対して

$$\int_C \frac{\partial f}{\partial y}dx=\int_C \frac{\partial f}{\partial x}dy$$

であることを示せ．

[4] $E=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x,y>0, x+y<1\}$ とするとき，次の等式を示せ．

$$\int\int_E x^{p-1}y^{q-1}(1-x-y)^{r-1}dxdy=\frac{\Gamma(p)\Gamma(q)\Gamma(r)}{\Gamma(p+q+r)} \qquad (p,q,r>0)$$

○ 発展問題（[4] の一般化）

$\varphi(u)$ は $(0,t)$ 上の連続関数で，広義積分 $\int_0^t \varphi(u)u^{p+q-1}du$ $(p,q>0)$ は収束するとする．このとき，

$$\int\int_{E_t} x^{p-1}y^{q-1}\varphi(x+y)dxdy=B(p,q)\int_0^t \varphi(u)u^{p+q-1}du$$

を示せ．ただし $E_t=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x,y>0, x+y<t\}$ とする．

注）$t=\infty$ でもよい．その場合，E_∞ は第１象限を表すものとする．