２０１１年度数学IA小テスト（第１１回）

（１２月１２日配布）

担当：斉藤　義久

[1] 次の重積分を計算せよ．

(1) $\displaystyle\int\int_D (2-x^2-y^2)dxdy, \quad D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 0\le x\le 1,\ -1\le y\le 1\}$

(2) $\displaystyle\int\int_D (x^2+y^2)dxdy, \quad D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 0\le x\le 1,\ 0\le y\le x\}$

(3) $\displaystyle\int\int_D |x|dxdy,$　D は原点を中心とする半径１の円盤

(4) $\displaystyle\int\int_D y^2e^{x^2}dxdy,$　D は $(0,0),\ (1,0),\ (1,1)$ を頂点とする三角形

[2] $f(x,y)$ を $\mathbb{R}^2$ 上の連続関数とするとき，次の反復積分の順序を交換せよ．

(1) $\displaystyle\int_0^2\left(\int_x^{2x} f(x,y)dy\right)dx,$　　(2) $\displaystyle\int_0^1\left(\int_0^{1+x-2x^2} f(x,y)dy\right)dx$

[3] 次の図形の体積を求めよ．

(1) $x+y+z=6,\ x=0,\ x+2y=4,\ z=0$ で囲まれる領域

(2) $x+y+z=6,\ x=y,\ y=0,\ x=3,\ z=0$ で囲まれる領域

(3) 半径が a の２つの直円筒の軸が角度 θ で交わっているとき，この２つの直円筒の共通部分

○ 発展問題

$\mathbb{Q}$ を有理数全体からなる集合とする．このとき $\mathbb{R}^2$ の有界な部分集合

$$X := \left\{ (x,y)\in\mathbb{R}^2 \;\middle|\; \begin{matrix} 0\le x,y\le 1 \\ x\notin\mathbb{Q} \text{ または } y\notin\mathbb{Q} \end{matrix} \right\}$$

は面積不確定であることを証明せよ．