２０１１年度数学IA小テスト（第１０回）

（１１月２８日配布）

担当：斉藤　義久

[1] (1) 極方程式で $r = a\theta$ $(a > 0)$ で表される曲線をアルキメデスの蝸線（かせん）と呼ぶ．この曲線の $0 \leq \theta \leq k$ までの長さを求めよ．

(2) 放物線 $y = \dfrac{x^2}{2a}$ の $0 \leq x \leq l$ の範囲の長さが (1) の曲線の $0 \leq \theta \leq k$ の範囲の長さと等しいとき，l を a と k で表せ．

[2] (1) a を正の定数とし，xy 平面上に２点 $A = (a, 0)$, $B = (-a, 0)$ をとる．このとき，$P = (x, y)$ であって，

$$|PA| \cdot |PB| = a^2$$

を満たす点が描く軌跡の方程式を，x と y の方程式の形で求めよ．ただし $|PA|$, $|PB|$ はそれぞれ線分 PA, PB の長さを表すものとする．

(2) 上の曲線の方程式を極方程式の形で表せ．

(3) この曲線の長さをガンマ関数を用いて表せ．ただしベータ関数とガンマ関数の関係式

$$B(p, q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)} \quad (p, q > 0)$$

は証明せずに用いて良い．

[3] $0 \leq t \leq 1$ とし,（広義）積分で定義される関数

$$u(k, t) = \int_0^t \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}} \quad (0 \leq k \leq 1)$$

を考える．

(1) 問 [2] に現れる曲線の長さが $4a \times u\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}, 1\right)$ と表せることを示せ．

(2) 以下 k は固定された定数とし，混乱の無い限りこれを省略して $u(t) = u(k, t)$ と書く．このとき，$u(t)$ の逆関数が存在することを示し（これを $\mathrm{sn}(u) = \mathrm{sn}(k, u)$ と書く），その定義域と値域を明示せよ．さらに $\mathrm{sn}(u)$ はその定義域内で連続関数であることを示せ．

(3) $\mathrm{sn}(0, u)$，および $\mathrm{sn}(1, u)$ を初等関数で表せ[1]．

[1] $k \neq 0, 1$ のとき，$\mathrm{sn}(k, u)$ を初等関数で表すことは出来ない

(4) 楕円 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(0<a<b)$ を考え，この楕円上に 2 点 $A=(a,0)$, $P=(a\cos\theta, b\sin\theta)$ $(\theta>0)$ をとる．AP 間の楕円の弧長を L とするとき，

$$L=b\int_0^{u_\theta}\bigl(1-k^2\mathrm{sn}^2(u)\bigr)du$$

であることを示せ．ただし $\mathrm{sn}^2(u)=\bigl(\mathrm{sn}(u)\bigr)^2$，$k=\sqrt{\dfrac{b^2-a^2}{b^2}}$．また u_θ は，条件 $\mathrm{sn}(u_\theta)=\sin\theta$ で一意的に決まる実数とする．

コメント）上の楕円の面積が $\pi b^2\times\dfrac{a}{b}=\pi ab$ で与えられることはよく知られている．他方，楕円の弧長は，面積と違って円の弧長から単純に求めることは出来ず，その計算はずっと難しい．

○ 発展問題

広義積分

$$I=\int_0^\infty\frac{\sin x}{x}dx$$

をディリクレ積分という．これは収束はするが，絶対収束はしない広義積分である（テキスト例 3.22 参照）．本問では，I の値を具体的に求めてみよう．

(1) $[0,\pi]$ 上の関数 $f(x)$ を以下で与える．

$$f(x)=\begin{cases}\left(\dfrac{x}{2}\right)^{-1}-\left(\sin\dfrac{x}{2}\right)^{-1} & (0<x\le\pi)\\ 0 & (x=0)\end{cases}$$

$f(x)$ は $[0,\pi]$ 上の連続関数であることを示せ．

(2) 次の等式を示せ．

$$I=\lim_{n\to\infty}\int_0^\pi\frac{\sin\frac{2n+1}{2}t}{2\sin\frac{t}{2}}dt \qquad (*)$$

ヒント）第 8 回の発展問題を上の $f(x)$ に適用してみよ．

(3) $I=\dfrac{\pi}{2}$ を示せ．

ヒント）$(*)$ の右辺の被積分関数を

$$\frac{\sin\frac{2n+1}{2}t}{2\sin\frac{t}{2}}$$
$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{(\sin\frac{2n+1}{2}t-\sin\frac{2n-1}{2}t)+(\sin\frac{2n-1}{2}t-\sin\frac{2n-3}{2}t)+\cdots+(\sin\frac{3}{2}t-\sin\frac{t}{2})+\sin\frac{t}{2}}{\sin\frac{t}{2}}$$

と書き直してみよ．