２０１１年度数学IA小テスト（第１回）

（４月１８日）

担当：斉藤　義久

[1] 第 n 項が次で与えられる数列 $\{a_n\}$ の極限値を求めよ．

(1) $a_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$　　(2) $a_n = \dfrac{n}{n+2}$　　(3) $a_n = \sqrt{n}$　　(4) $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$

[2] 正の実数よりなる数列 $\{a_n\}$ に対し，極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ が存在すると仮定する．この極限値を α とするとき，

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \alpha$$

となることを証明せよ．

[3] 数列 $\{a_n\}$ を以下の漸化式で定める．

$$a_1 = 1, \quad a_n = \frac{a_{n-1}}{2} + \frac{1}{a_{n-1}} \ (n \geq 2).$$

このとき，

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \sqrt{2}$$

を示せ．

コメント）作り方から各 a_n は全て有理数であるが，にもかかわらず「収束先は無理数である」というのが，この問題のポイントである．

○ 発展問題

x を実数とするとき，次の等式を示せ．

$$\lim_{n\to\infty}\left(\lim_{m\to\infty}\left(\cos(n!\pi x)\right)^{2m}\right) = \begin{cases} 1 & x \text{ は有理数} \\ 0 & x \text{ は無理数} \end{cases}$$

また，極限を取る順序を入れ替えて

$$\lim_{m\to\infty}\left(\lim_{n\to\infty}\left(\cos(n!\pi x)\right)^{2m}\right)$$

とした場合はどうなるか考えてみよ．