２０１０年度数理科学IIプリント
（７月６日配布）

担当：斉藤　義久

● 講義中に説明出来なかった部分に関する補足

8.4 ベッセル方程式の応用

ベッセル方程式が実際の問題に現れる例として，円周上に張られた薄膜の振動現象を紹介しよう．

xy 平面上に半径 $a>0$ の円周 $C: x^2+y^2=a^2$ を考え，この円周に薄膜を張る．時刻 t における位置 (x,y) の変位（高さ）を $w(t;x,y)$ とすると，次の微分方程式を満たすことが知られている（これは力学の問題！）．

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=c\Delta(w), \qquad w\big|_C=0. \tag{8.4.1}$$

ただし，

$$\Delta=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2} \qquad \text{（ラプラシアン）},$$

$$c=\sqrt{\frac{\tau}{\sigma}}>0 \qquad (\tau\text{：膜の張力，}\sigma\text{：膜の面密度}).$$

(8.4.1) の第１式は**２次元の波動方程式**と呼ばれる．また第２式は，考える領域の境界（今の場合は円周 C 上）での解の挙動を指定するもので，境界条件とも呼ばれる．すなわち (8.4.1) は，

『$w\big|_C=0$ なる境界条件の下に２次元波動方程式を解け』

という問題を考えていることになる．このように，ある偏微分方程式を与えられた境界条件の下に解く問題を，**偏微分方程式の境界値問題**という．

さて，(8.4.1) をいきなり解くのは難しいので，解の形を

$$w(t;x,y)=v(t)u(x,y)$$

と仮定して解いてみる（これを**変数分離法**という）．第１式から，

$$v''(t)u(x,y)=c^2v(t)\Delta(u).$$

よって

$$\frac{v''(t)}{c^2v(t)}=\frac{\Delta(u)}{u}=-\lambda\ (\text{定数}).$$

また第２式は

$$u\big|_C=0.$$

したがって，$w(t;x,y)=v(t)u(x,y)$ なる仮定の下に (8.4.1) は次の３式と同値：

$$v''(t)+c^2\lambda v(t)=0, \tag{8.4.2}$$

$$\Delta(u)+\lambda u=0, \tag{8.4.3}$$

$$u\big|_C=0. \tag{8.4.4}$$

(8.4.2) はすでに解き方を知っている方程式（定数係数の 2 階線形常微分方程式）で，特性方程式は

$$z^2 + c^2\lambda = 0.$$

よって，実数解の形は λ の符号で決まるが，これに関しては次が成り立つ：

Lemma 8.4.1 $\lambda > 0$ である．

Proof. (8.4.2) から

$$\Delta(u) + \lambda u = 0.$$

両辺に u を掛けてから，半径 a の円板 D 上で積分すると

$$\int_D u\Delta(u)dxdy + \lambda\int_D u^2 dxdy = 0. \tag{$*$}$$

微分形式 f を

$$f := u\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)dx + u\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right)dy$$

とおく．このとき

$$\begin{aligned} df &= \left(-\frac{\partial}{\partial y}\left(u\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(u\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right)\right)\right)dxdy \\ &= \left(\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + u\Delta(u)\right)dxdy. \end{aligned}$$

D の境界は C なので，グリーンの定理から

$$\begin{aligned} \int_D \left(\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + u\Delta(u)\right)dxdy &= \int_D df = \int_C f \\ &= \int_C u\left(\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)dx + \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right)dy\right). \end{aligned}$$

(8.4.4) より右辺は 0. よって

$$\int_D u\Delta(u)dxdy = -\int_D \left(\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right)dxdy < 0.$$

一方

$$\int_D u^2 dxdy > 0$$

だから，$(*)$ より $\lambda > 0$. □

よって (8.4.2) の実数解の基本系として

$$\cos\left(c\sqrt{\lambda}t\right), \qquad \sin\left(c\sqrt{\lambda}t\right)$$

がとれる．

一方 (8.4.3) は偏微分方程式で，まだ難しい．極座標

$$x = r\cos\theta, \qquad y = r\sin\theta$$

を導入して，もう一度変数分離法を用いる．すなわち

$$u(x,y) = u(r,\theta) = U(r)V(\theta)$$

を仮定する．このとき

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2}$$

であったので，(8.4.3) は

$$U''(r)V(\theta) + \frac{1}{r}U'(r)V(\theta) + \frac{1}{r^2}U(r)V''(\theta) + \lambda U(r)V(\theta) = 0$$

と書き直せる．これを変形して

$$\big(r^2U''(r) + rU'(r) + \lambda r^2 U(r)\big)V(\theta) = -U(r)V''(\theta)$$

すなわち，

$$\frac{r^2U''(r) + rU'(r) + \lambda r^2 U(r)}{U(r)} = -\frac{V''(\theta)}{V(\theta)} = \mu \ (\text{定数})$$

を得る．したがって $U(r)$ に関しては

$$U''(r) + \frac{1}{r}U'(r) + \left(\lambda - \frac{\mu}{r^2}\right)U(r) = 0 \tag{8.4.5}$$

を得る．また (8.4.4) と $u(x,y) = U(r)V(\theta)$ から

$$U(a) = 0 \tag{8.4.6}$$

を得る．

$V(\theta)$ に関しては，上の微分方程式から得られる

$$V''(\theta) + \mu V(\theta) = 0 \tag{8.4.7}$$

に加えて，(r,θ) が極座標であったことから

$$V(0) = V(2\pi) \tag{8.4.8}$$

を得る．

(8.4.7) は定数係数の 2 階線形常微分方程式である．特性方程式は

$$z^2 + \mu = 0$$

であり，$\mu < 0$ なら指数関数で書ける実数解を，$\mu > 0$ なら三角関数で書ける実数解を持つ．ところが $V(\theta)$ が周期的であるという条件 (8.4.8) から前者はありえず，しかもその周期は

$$\frac{2\pi}{n} \qquad (n = 1, 2, \cdots)$$

でなければならないから，

$$\mu = n^2 \qquad (n = 1, 2, \cdots)$$

でなければならない．このとき (8.4.7) の解の基本形は

$$\cos(n\theta), \qquad \sin(n\theta), \qquad (n = 1, 2, \cdots)$$

である．

$\mu = 0$ のときは，(8.4.7) は高々１次の多項式で書ける解を持つが，(8.4.8) から定数関数しかあり得ない．したがって，この場合も併せて

$$\mu = n^2 \qquad (n = 0, 1, 2, \cdots)$$

であり，(8.4.7) の解の基本形は

$$\cos(n\theta), \qquad \sin(n\theta), \qquad (n = 0, 1, 2, \cdots)$$

であるとしてよい．

この結果を (8.4.5) に戻して

$$U''(r) + \frac{1}{r}U'(r) + \left(\lambda - \frac{n^2}{r^2}\right)U(r) = 0$$

を得る．$s = \sqrt{\lambda}r$ と変数変換して

$$J(s) = J(\sqrt{\lambda}r) := U(r)$$

とおくと，上の方程式は

$$J''(s) + \frac{1}{s}J'(s) + \left(1 - \frac{n^2}{s^2}\right)U(s) = 0 \tag{8.4.5$'$}$$

となる．これはベッセル方程式に他ならない．

(8.4.5)' の決定方程式は

$$z^2 - n^2 = 0$$

で，これは根の差が整数になる場合である．したがってこの方程式はベッセル関数とノイマン関数による解の基本系を持つが，もともとの問題が薄膜の振動に関する問題であったので，解が $s = 0$ で発散しては困る．したがって物理現象の解析としては，n 次ベッセル関数による解

$$J_n(s) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(k+n)!}\left(\frac{s}{2}\right)^{n+2k}$$

のみが意味を持つ．

さらに (8.4.6) から

$$U(a) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad J_n(\sqrt{\lambda}a) = 0.$$

$J_n(s)$ の零点を小さい方から順に

$$\nu_{n,1}, \nu_{n,2}, \cdots, \nu_{n,m}, \cdots$$

と並べたとすれば，

$$\lambda = \frac{\nu_{n,m}^2}{a^2} \qquad (m = 1, 2, \cdots).$$

したがって

$$\begin{aligned} u(r,\theta) &= J_n\left(\frac{\nu_{n,m}}{a}r\right)\cos(n\theta) \qquad (n = 0, 1, \cdots,\ m = 1, 2, \cdots) \\ &\text{or} \\ &= J_n\left(\frac{\nu_{n,m}}{a}r\right)\sin(n\theta) \qquad (n = 1, 2, \cdots,\ m = 1, 2, \cdots) \end{aligned}$$

これと

$$v(t) = \cos\left(c\frac{\nu_{n,m}}{a}t\right) \quad \text{or} \quad \sin\left(c\frac{\nu_{n,m}}{a}t\right)$$

を併せて，求める解 $w(t;r,\theta) = v(t)u(r,\theta)$ が得られる．

考えている方程式 (8.4.1) は線形方程式であるので，解の重ね合わせができる．すなわち，上の組み合わせの１次結合で書けるようなものは，全て (8.4.1) の解である：

$$\begin{aligned} w(t;r,\theta) = &\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} a^{+}_{n,m}\cos\left(c\frac{\nu_{n,m}}{a}t\right)J_n\left(\frac{\nu_{n,m}}{a}r\right)\cos(n\theta) \\ &+\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} a^{-}_{n,m}\sin\left(c\frac{\nu_{n,m}}{a}t\right)J_n\left(\frac{\nu_{n,m}}{a}r\right)\cos(n\theta) \\ &+\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} b^{+}_{n,m}\cos\left(c\frac{\nu_{n,m}}{a}t\right)J_n\left(\frac{\nu_{n,m}}{a}r\right)\sin(n\theta) \\ &+\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} b^{-}_{n,m}\sin\left(c\frac{\nu_{n,m}}{a}t\right)J_n\left(\frac{\nu_{n,m}}{a}r\right)\sin(n\theta). \end{aligned}$$

「こんなものが本当に収束しているのか？」というのはもちろん自明ではないが，答えは YES である．

さらに強く,「任意の解は上の形で書ける」ということまで知られている．つまり，変数分離法によって特別な解を探していたように思えるけれども，実はそれで十分だったのである．

Remark．この議論におけるベッセル方程式の出所は

$$\Delta(u) + \lambda u = 0$$

であった．より詳しく言えば，この方程式を極座標に変換して r 方向の微分方程式を考えると，ベッセル方程式が現れた．

今の場合 Δ は２次元のラプラシアンであったが，３次元のラプラシアンであっても極座標に変換して r 方向の微分方程式を考えると，やはりベッセル方程式が得られる．考えている問題によって必ずしも極座標変換を行うことが適切であるとは言えないが，今の例のように問題が回転対称性を持っている場合には極座標で表示した方が問題は簡単になる．

電磁気学や量子力学，あるいは工学においても

$$\Delta(u) + \lambda u = 0$$

のタイプの方程式は頻繁に現れる．ベッセル方程式の重要性が理解されるであろう．

例　題

<u>例題１</u>： $x' = \cos(x+t)$ を解け.

(解)　$y(t) = x(t) + t$ とおく.

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dx}{dt} + 1 = \cos y + 1$$

なので，y の方程式として変数分離形.

$$\int \frac{dy}{1+\cos y} = \int dt$$

であるが,

$$（左辺）= \frac{1}{2}\int \frac{dy}{\cos^2 \frac{y}{2}} = \tan\frac{y}{2} = \tan\frac{x+t}{2}.$$

よって

$$\tan\frac{x+t}{2} = t + C.$$

したがって

$$x(t) = 2\mathrm{Arctan}(t+C) - t \quad （答）$$

<u>例題２</u>： $x' = \dfrac{x-t}{x+t}$ を解け.

(解)　$f(t,x) = \dfrac{x-t}{x+t}$ とおくと，

$$f(\lambda t, \lambda x) = \frac{\lambda(x-t)}{\lambda(x+t)} = f(t,x)$$

なので，これは同次型．したがって $u = x/t$ とおいて u に関する方程式に直すと，変数分離形になる：

$$x' = u + tu' = \frac{u-1}{u+1} \quad \Rightarrow \quad u' = -\frac{u^2+1}{t(u+1)}$$

よって

$$\int \frac{u+1}{u^2+1}du = -\int \frac{dt}{t}.$$

$$（左辺）= \frac{1}{2}\log(u^2+1) + \mathrm{Arctan}u + C,$$

$$（右辺）= -\log|t| + C.$$

ゆえに

$$\frac{1}{2}\log(\frac{x}{t}^2 + 1) + \mathrm{Arctan}\frac{x}{t} + \log|t| = \frac{1}{2}\log(x^2+t^2) + \mathrm{Arctan}\frac{x}{t} = C \quad （答）$$

<u>例題３</u>： $x' = -\dfrac{3t^2x + x^2 + 2}{t^3 + 2tx - 2x}$ を解け.

(解)　これは同次型ではない．しかし

$$（与式）\quad \Leftrightarrow \quad (3t^2x + x^2 + 2) + (t^3 + 2tx - 2x)x' = 0$$

であり，

$$\frac{\partial}{\partial x}(3t^2x + x^2 + 2) = 3t^2 + 2x = \frac{\partial}{\partial t}(t^3 + 2tx - 2x)$$

だから，全微分型である.

$$P(t,x) = 3t^2x + x^2 + 2, \quad Q(t,x) := t^3 + 2tx - 2x$$

として

$$\begin{aligned}\varphi(t,x) &= \int_{t_0}^{t} P(t,x)dt + \int_{x_0}^{x} Q(t_0,x)dx \\ &= \int_{t_0}^{t} (3t^2x + x^2 + 2)dt + \int_{x_0}^{x} (t_0^3 + 2t_0x - 2x)dx \\ &= t^3x + tx^2 + 2t - x^2 + C.\end{aligned}$$

よって一般解は

$$t^3x + tx^2 + 2t - x^2 + C = 0 \quad （答）$$

<u>例題４</u>： $x'' + x' + x = t^2 + e^t \sin t$ を解け.

(解)　対応する斉次方程式は

$$x'' + x' + x = 0$$

であり，その特性多項式は

$$P(z) = z^2 + z + 1 = \left(z + \frac{1 - \sqrt{-3}}{2}\right)\left(z + \frac{1 + \sqrt{-3}}{2}\right).$$

よって複素数の範囲での一般解は

$$x(t) = C_1 e^{(\frac{-1+\sqrt{-3}}{2})t} + C_2 e^{(\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}t)} \quad (C_1, C_2 \in \mathbb{C}).$$

また実数解は

$$x(t) = C_1 e^t \cos\frac{\sqrt{3}}{2}t + C_2 e^t \sin\frac{\sqrt{3}}{2}t \quad (C_1, C_2 \in \mathbb{R}).$$

あとは与えられた非斉次方程式の特殊解を求めればよい．しかし非斉次項は

$$e^{\gamma t} q(t)$$

の形をしていないので講義中にやったパターンには収まらず,「解けないじゃないか！」と思うかもしれない．しかしちょっとした応用で，うまく解くことができる.

補助的に次の２つの非斉次方程式を考えよう.

$$x'' + x' + x = t^2, \qquad x'' + x' + x = e^t \sin t.$$

各々は講義中にやったパターンにはまるので，特殊解を求めることができることに注意する．第1の方程式の特殊解を $x_1(t)$, 第2の方程式の特殊解を $x_2(t)$ とし，

$$x_0(t) := x_1(t) + x_2(t)$$

とおく．このとき

$$\begin{aligned}(D^2+D+1)x_0 &= (D^2+D+1)(x_1+x_2)\\ &= \big\{(D^2+D+1)x_1\big\} + \big\{(D^2+D+1)x_2\big\}\\ &= t^2 + e^t\sin t.\end{aligned}$$

である．すなわち $x_0(t) := x_1(t) + x_2(t)$ は与えられた方程式の特殊解である．

つまり，非斉次項が $e^{\gamma_i t}q_i(t)$ の和の形になっている時には，これらをバラして補助的な非斉次方程式を考え，各々の特殊解を構成した上で最後に全て足し合わせれば良いのである．

まず $x'' + x' + x = t^2$ を考えよう．$q(t) = t^2$ $(m = 2)$, $\gamma = 0$ の場合にあたる．

$$P(D) = 1 - D(-(D+1)) \qquad (Q(D) = -(D+1))$$

であるので，特殊解 $x_1(t)$ は

$$x_1(t) = (1 + DQ(D) + D^2Q(D)^2)q(t) = (1 - D + 2D^3 + D^4)t^2 = t^2 - 2t.$$

こんどは $x'' + x' + x = e^t\sin t$ を考える．非斉次項 $e^t\sin t$ は $e^{(1+\sqrt{-1})t}$ の虚部であるので，$x'' + x' + x = e^t\sin t$ の特殊解 $x_2(t)$ を得るには，

$$x'' + x' + x = e^{(1+\sqrt{-1})t} \tag{$*$}$$

の（複素数の範囲での）特殊解 $X_2(t)$ を作り，その虚部を取ればよい．これは $q(t) = 1$ $(m = 0)$, $\gamma = 1 + \sqrt{-1}$ の場合であることにも注意しておく．

$$(*) \quad \Leftrightarrow \quad P(D + (1+\sqrt{-1}))(e^{-(1+\sqrt{-1})t}x(t)) = 1.$$

$$P(D + (1+\sqrt{-1})) = D^2 + (3 + 2\sqrt{-1})D + (2 + 3\sqrt{-1})$$

なので，

$$(*) \quad \Leftrightarrow \quad (D^2 + (3+2\sqrt{-1})D + (2+3\sqrt{-1}))(e^{-(1+\sqrt{-1})t}x(t)) = 1.$$

したがって

$$e^{-(1+\sqrt{-1})t}x(t) = \frac{1}{2+3\sqrt{-1}} = \frac{2}{13} - \frac{3}{13}\sqrt{-1} \quad \text{（定数関数）}$$

とおけば，これは特殊解となる[1]．ゆえに $(*)$ の特殊解 $X_2(t)$ は

$$\begin{aligned} X_2(t) &= \left(\frac{2}{13} - \frac{3}{13}\sqrt{-1}\right) e^{(1+\sqrt{-1})t} \\ &= \left(\frac{2}{13}e^t \cos t + \frac{3}{13}e^t \sin t\right) + \sqrt{-1}\left(\frac{2}{13}e^t \sin t - \frac{3}{13}e^t \cos t\right). \end{aligned}$$

よって $x'' + x' + x = e^t \sin t$ の特殊解 $x_2(t)$ は

$$x_2(t) = \frac{2}{13}e^t \sin t - \frac{3}{13}e^t \cos t$$

で与えられる．

以上の議論を併せて，問題の方程式 $x'' + x' + x = t^2 + e^t \sin t$ の一般解は，

$$x(t) = C_1 e^{(\frac{-1+\sqrt{-3}}{2})t} + C_2 e^{(\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}t)} + t^2 - 2t + \frac{2}{13}e^t \sin t - \frac{3}{13}e^t \cos t \quad (C_1, C_2 \in \mathbb{C}).$$

また実数解は

$$x(t) = C_1 e^t \cos \frac{\sqrt{3}}{2}t + C_2 e^t \sin \frac{\sqrt{3}}{2}t + t^2 - 2t + \frac{2}{13}e^t \sin t - \frac{3}{13}e^t \cos t \quad (C_1, C_2 \in \mathbb{R}).$$

例題５：$t^2 x'' + 3tx' + x = t + t^{-1}$ を解け．

(解説) これは講義中に解法をやらなかったタイプの方程式で，**オイラー型方程式**と呼ばれる．まず定義を述べておく．

定義． $a_1, \cdots, a_n$ を定数として

$$t^n x^{(n)}(t) + a_1 t^{n-1} x^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1} t x'(t) + a_n x(t) = f(t)$$

なる形の微分方程式をオイラー型方程式という．

オイラー型方程式については次が知られている．

命題． $t = e^s$ なる変数変換を施すと，オイラー型方程式は定数係数線形方程式に変換される．

(証明) 定義から $s = \log t$ であることに注意する．

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dx}{ds}\frac{ds}{dt} = \frac{1}{t}\frac{dx}{ds}$$

---

[1]講義中に述べた一般論によれば，

$$P(D + (1 + \sqrt{-1})) = D^2 + (3 + 2\sqrt{-1})D + (2 + 3\sqrt{-1})$$

と展開したところで，$P(z)$ の定数項を 1 にするように適当な定数（今の場合は $2 + 3\sqrt{-1}$）で割る必要があった．非斉次項が複雑な多項式である場合にはこのような計算方法も有効であるが，今の場合には非斉次項は 1（定数関数）なので，そのような操作を経ずとも簡単に特殊解を構成出来る．何事も公式をバカ正直にあてはめるのではなく，臨機応変な対応が肝心である．

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{t}\frac{dx}{ds}\right) = -\frac{1}{t^2}\frac{dx}{ds} + \frac{1}{t}\frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{ds}\right) = -\frac{1}{t^2}\frac{dx}{ds} + \frac{1}{t}\frac{d^2x}{ds^2}\frac{ds}{dt}$$
$$= \frac{1}{t^2}\frac{d}{ds}\left(\frac{d}{ds} - 1\right)x$$

以下 $D_s = \frac{d}{ds}$ と書こう．同様の計算を繰り返していくことで，

$$\frac{d^kx}{dt^k} = \frac{1}{t^k}D_s(D_s-1)\cdots(D_s-k+1)x$$

が示される（まじめにやるには数学的帰納法で示すことになる）．これをオイラー型方程式に代入して命題を得る． □

(例題５の解)　$t = e^s$ と変数変換する．このとき与えられた方程式は

$$t^2 \cdot \frac{1}{t^2}D_s\left(D_s - 1\right)x + 3t \cdot \frac{1}{t}D_s x + x = e^s + e^{-s} \quad \Leftrightarrow \quad (D_s+1)^2 x = e^s + e^{-s}$$

となり，s を変数とする定数係数の線形方程式（非斉次）に変換される．この方程式の斉次方程式は

$$(D_s+1)^2x = 0$$

で，その特性根は -1（重根）．よって一般解は

$$x(s) = C_1e^{-s} + C_2se^{-s}.$$

非斉次方程式 $(D_s+1)^2x = e^s + e^{-s}$ の特殊解を構成するために，補助的に

$$(D_s+1)^2x = e^s, \qquad (D_s+1)^2x = e^{-s}$$

を考える．第１の方程式の両辺に e^{-s} をかけて

$$e^{-s}(D_s+1)^2x = ((D_s+1)+1)^2(e^{-s}x) = (D_s+2)^2(e^{-s}x) = 1.$$

したがって特殊解として

$$e^{-s}x_1(s) = \frac{1}{4} \quad \Leftrightarrow \quad x_1(s) = \frac{e^s}{4}$$

が取れる．一方，第２の方程式の両辺に e^s をかけて

$$e^s(D_s+1)^2x = D_s^2(e^sx) = 1$$

したがって特殊解として

$$e^sx_2(s) = \frac{s^2}{2} \quad \Leftrightarrow \quad x_2(s) = \frac{s^2e^{-s}}{2}$$

が取れる．あわせて $(D_s+1)^2x = e^s + e^{-s}$ の一般解は

$$x(s) = C_1e^{-s} + C_2se^{-s} + \frac{e^s}{4} + \frac{s^2e^{-s}}{2}.$$

これを $t = e^s$ の関数の形に直すと

$$x(t) = C_1\frac{1}{t} + C_2\frac{\log t}{t} + \frac{t}{4} + \frac{(\log t)^2}{2t} \quad \text{（答）}$$

(例題５の別解) 与えられた微分方程式の斉次方程式は

$$t^2x'' + 3tx' + x = 0 \tag{$*$}$$

である．両辺を t^2 で割れば

$$x'' + \frac{3}{t}x' + \frac{1}{t^2}x = 0$$

である．よって $p(t) = 3,\, q(t) = 1$ として，$t = 0$ を確定特異点に持つ微分方程式であることがわかる．すなわち，この場合はベキ級数による解法でも解くことができる．

問題の方程式は（非斉次の方程式であるが）線形方程式であるので，一般解が

斉次方程式の一般解 + 非斉次方程式の特殊解

という形に書けることは定数係数の線形方程式の場合と同様に成り立つ．そこでまず $(*)$ の一般解をベキ級数による解法で求めよう．

$p(t) = 3,\, q(t) = 1$ であったので，決定方程式は

$$f(z) = z(z-1) + 3z + 1 = z^2 + 2z + 1 = 0$$

であり，その根は -1 (重根) である．まず解の形を

$$x(t) = t^\rho \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k t^k \quad (\alpha_0 \neq 0) \tag{$**$}$$

と仮定する．このとき

$$x'(t) = \sum_{k=0}^{\infty}(k+\rho)\alpha_k t^{k+\rho-1}, \qquad x''(t) = \sum_{k=0}^{\infty}(k+\rho)(k+\rho-1)\alpha_k t^{k+\rho-2}$$

を $(*)$ の左辺に代入して整理すると，

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{\infty}\{(k+\rho)(k+\rho-1) + 3(k+\rho) + 1\} &= \sum_{k=0}^{\infty} f(k+\rho)\alpha_k t^{k+\rho} \\ &= 0.\end{aligned}$$

$\rho = -1$ として上式に代入すれば

$$\sum_{k=0}^{\infty} f(k-1)\alpha_k t^{k-1} = 0.$$

ここで両辺の係数を比較すると

t^{-1} の係数：$f(-1) \times \alpha_0 = 0 \times \alpha_0 = 0 \quad$ (no condition).

t^k $(k \geq 0)$ の係数：$f(k) \times \alpha_{k+1} = 0$.

$f(z) = 0$ となるのは $z = -1$ のときのみだから，$k \geq 0$ ならば $\alpha_k = 0$．よって $(**)$ の形の解として

$$x_1(t) = \frac{\alpha_0}{t}$$

を得る．

もう一つの解 $x_2(t)$ を求めよう．決定方程式が重根を持つので，いまの場合

$$\rho = \rho_1 = \rho_2 \qquad (\Leftrightarrow \quad \rho_1 - \rho_2 = N = 0)$$

であることに注意しよう．

講義中に解説したレシピは,

『$x_1(t)=t^\rho u(t)$ に対して $x=x_1\cdot y$ によって $y=y(t)$ を定義し，
与式を y に関する微分方程式に書き直す』

というものだった．今の場合 $\rho=-1$ で，さらに $u(t)=\alpha_0$ (定数関数) だから，話は随分簡単になる．

$$x=x_1\cdot y=\frac{\alpha_0}{t}\cdot y \quad\Leftrightarrow\quad y=\frac{tx}{\alpha_0}$$

とおく．$(*)$ を y に対する方程式に書き直すと

$$\begin{aligned}(*) &\Leftrightarrow y''+\frac{y'}{t}=0\\ &\Leftrightarrow w'+\frac{w}{t}=0 \quad (w:=y')\\ &\Leftrightarrow \frac{w'}{w}=-\frac{1}{t}.\end{aligned}$$

両辺を t で積分して

$$\log w=-\log t+C \quad (C\ \text{は積分定数}).$$

したがって

$$w=C_1t^{-1} \quad (C_1\ \text{は定数}).$$

$w=y'$ だったので，両辺をもう一度 t で積分して

$$y=C_1\log t+C_2 \quad (C_1,\ C_2\ \text{は定数})$$

となる．$x=\alpha_0t^{-1}y$ だったので，定数を改めて C_1, C_2 と書くことにすれば

$$x(t)=C_1\frac{\log t}{t}+C_2\frac{1}{t} \qquad (***)$$

となる．これが斉次方程式 $(*)$ の一般解である．$C_1=0$ の場合が前半で求めた $x_1(t)$ であり，$x_2(t)=t^{-1}\log t$ が 1 次独立なもう一つの解ということになる．

あとは非斉次方程式の特殊解を求めればよい．もちろん $t=e^s$ と変数変換する方法でも特殊解を求めることができるが，ここでは別の方法でやってみよう．

与えられた方程式を 1 階行列化する．前半の議論と記号がダブってしまうが，気にしないことにして

$$x_1(t)=x(t), \quad x_2(t)=x'(t)$$

とおくことにしよう．このとき

$$\begin{aligned}(\text{与式}) &\Leftrightarrow \begin{cases} x_1'(t)=x_2(t)\\ x_2'(t)=-t^{-2}x_1(t)-3t^{-1}x_2(t)+t^{-1}+t^{-3}\end{cases}\\ &\Leftrightarrow \frac{d}{dt}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -t^{-2} & -3t^{-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\ t^{-1}+t^{-3}\end{pmatrix}\end{aligned}$$

斉次方程式 $(*)$ を考えるということは，

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -t^{-2} & -3t^{-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}$$

を考えていることに他ならない．すなわち，前半で行った $(***)$ を求める議論は，この方程式の解の基本系 $V(t) = (\mathbf{v}_1(t), \mathbf{v}_2(t))$ が

$$\mathbf{v}_1(t) = \begin{pmatrix} t^{-1} \\ (t^{-1})' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t^{-1} \\ -t^{-2} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{v}_2(t) = \begin{pmatrix} t^{-1}\log t \\ (t^{-1}\log t)' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t^{-1}\log t \\ t^{-2}(1-\log t) \end{pmatrix}$$

であると言っていることになる．このとき

$$V(t) = \begin{pmatrix} t^{-1} & t^{-1}\log t \\ -t^{-2} & t^{-2}(1-\log t) \end{pmatrix}$$

の行列式は

$$\det V(t) = t^{-3}(1-\log t) + t^{-3}\log t = t^{-3}$$

だから，$V(t)$ は逆行列

$$V(t)^{-1} = \frac{1}{t^{-3}} \begin{pmatrix} t^{-2}(1-\log t) & -t^{-1}\log t \\ t^{-2} & t^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t(1-\log t) & -t^2\log t \\ t & t^2 \end{pmatrix}$$

を持つ．講義の 4.3 節で行った議論と同様に

$$\mathbf{x}_0(t) = V(t)\int_0^t V(t)^{-1}\mathbf{f}(t)dt$$

を考えてみる．ただし

$$\mathbf{f}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ t^{-1}+t^{-3} \end{pmatrix}.$$

$$V(t)^{-1}\mathbf{f}(t) = \begin{pmatrix} t(1-\log t) & -t^2\log t \\ t & t^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ t^{-1}+t^{-3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -(t+t^{-1})\log t \\ t+t^{-1} \end{pmatrix}$$

であるので，

$$\int_0^t V(t)^{-1}\mathbf{f}(t)dt = \begin{pmatrix} \frac{1}{4}t^2 - \frac{1}{2}t^2\log t - \frac{1}{2}(\log t)^2 \\ \frac{1}{2}t^2 + \log t \end{pmatrix}$$

となる，したがって

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_0(t) &= \begin{pmatrix} t^{-1} & t^{-1}\log t \\ -t^{-2} & t^{-2}(1-\log t) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{4}t^2 - \frac{1}{2}t^2\log t - \frac{1}{2}(\log t)^2 \\ \frac{1}{2}t^2 + \log t \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{4}t + \frac{1}{2}t^{-1}(\log t)^2 \\ \frac{1}{2} + t^{-2}\log t - \frac{1}{2}t^{-2}(\log t)^2 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

を得る．4.3 節の議論によれば，この第一成分

$$\frac{t}{4} + \frac{(\log t)^2}{2t}$$

が与えられた方程式の特殊解を与える．このことは具体的に代入してみることによっても，もちろん確かめられる．以上全てあわせて，与えられた方程式の一般解は

$$x(t) = C_1\frac{\log t}{t} + C_2\frac{1}{t} + \frac{t}{4} + \frac{(\log t)^2}{2t}$$

となる．もちろん，第一解法と同じ答えになる．

(コメント) ここまで見ればわかるように，最初の解法で解いた方がずっとラクである．説明したかったのは，あくまで「別の解き方もある」ということで，第２の解法は（この問題に関しては）うまいやり方とは言えないだろう．ただ，くどいようだが，解き方というのはいろいろあるのであって，どの解き方が優れているというものではない．

例題６：次の連立微分方程式を解け．

$$\begin{cases} x_1'(t) = x_1(t) + 2x_2(t) \\ x_2'(t) = 2x_1(t) + x_2(t) \end{cases}$$

（コメント）これは講義中の例 6.3.1 と全く同じ方程式である．講義中は行列の指数関数を用いいた解法を解説したが，一般に「解き方」というのは１通りではなく，いろいろなやり方がある．ここでは別の方法でやってみよう．

（例題６の解（例 6.3.1 の別解））第１式と第２式を加えると

$$x_1' + x_2' = 3x_1 + 3x_2.$$

よって $y_1(t) = x_1(t) + x_2(t)$ とおけば

$$y_1' = 3y_1$$

である．これを解いて

$$y_1(t) = x_1(t) + x_2(t) = C_1 e^{3t} \qquad (*)$$

一方，第１式から第２式を引いて

$$x_1' - x_2' = -x_1 + x_2.$$

$y_2(t) = x_1(t) - x_2(t)$ とおけば，

$$y_2' = -y_2.$$

これを解いて

$$y_2(t) = x_1(t) - x_2(t) = C_2 e^{-t} \qquad (**)$$

$(*), (**)$ から

$$x_1(t) = \frac{1}{2}(C_1 e^{3t} + C_2 e^{-t}), \quad x_2(t) = \frac{1}{2}(C_1 e^{3t} - C_2 e^{-t}).$$

（解説）比べてみればわかると思うが，上のやり方の方が「簡単」に感じるだろう．コメント欄で述べたように，解き方というのは１つではないので，その場に応じて「簡単な方法」を選択することが肝要である．ちなみに線形代数の理論によれば，この２つの方法は「同じことを別の方法で計算しているだけ」であることがわかる．興味のあるものは，なぜ両者が同じ計算をしていることになるのか，考えてみるとよいだろう．

上のような計算方法は 2×2 程度であれば速いが，行列のサイズが大きくなるにしたがって，行列の指数関数を計算してしまった方が楽になる場合もありうる．特に一般論を論じる場合には行列の指数関数を用いる方法の方が圧倒的に見通しが良い．ただし（繰り返しになるが），具体的な計算の場合には「どちらを選択するか？」は case by case なのであって，一般的な処方箋はない．大事なことは，いろいろな計算方法を知った上で，一番いい方法（楽な方法）を選ぶことだと思う．

（例題６の解その２）この問題の場合は，先の解き方で解くのが一番簡単だと思うが，もう少し汎用性の高い，別の方法も紹介しておこう．基本的なアイデアは

「２つの連立方程式からうまく未知関数を消去して，
１つの未知関数に関する（単独の）方程式に直す」

というものである．

与えられた方程式は

$$\begin{cases} (D-1)x_1(t) - 2x_2(t) = 0 \\ 2x_1(t) - (D-1)x_2(t) = 0 \end{cases}$$

と書き直せる．ここから $x_1(t)$ のみの式を得ようと思えば，第１式の両辺に $(D-1)$，第２式を２倍して，辺々引き算すればよい：

$$\begin{aligned} &(D-1)\big\{(D-1)x_1(t) - 2x_2(t)\big\} - 2\big\{2x_1(t) - (D-1)x_2(t)\big\} \\ &\quad = (D-1)^2 x_1(t) - 4x_1(t) = (D^2 - 2D - 3)x_1(t) \\ &\quad = (D-3)(D+1)x_1(t) = 0. \end{aligned}$$

よって，

$$x_1(t) = C_1 e^{3t} + C_2 e^{-t}.$$

この結果を第１式に代入して，

$$\begin{aligned} x_2(t) &= \frac{1}{2}(D-1)(C_1 e^{3t} + C_2 e^{-t}) \\ &= \frac{1}{2}\big\{(3C_1 e^{3t} - C_2 e^{-t}) - (C_1 e^{3t} + C_2 e^{-t})\big\} \\ &= C_1 e^{3t} - C_2 e^{-t}. \end{aligned}$$

（解説）この方法は次のように一般化できる：与えられた連立方程式が

$$\begin{cases} P(D)x_1(t) + Q(D)x_2(t) = f_1(t) \\ R(D)x_1(t) + S(D)x_2(t) = f_2(t) \end{cases}$$

であったとする．ここから $x_2(t)$ を消去したい場合は，第１式に $S(D)$, 第２式に $Q(D)$ を施して辺々引き算すればよい．

$$\begin{aligned} （左辺）&= S(D)\big\{P(D)x_1(t) + Q(D)x_2(t)\big\} - Q(D)\big\{R(D)x_1(t) + S(D)x_2(t)\big\} \\ &= \big\{S(D)P(D) - Q(D)R(D)\big\}x_1(t). \end{aligned}$$

$$（右辺）= S(D)f_1(t) - Q(D)f_2(t).$$

すなわち，$x_1(t)$ のみの単独の方程式

$$\big\{S(D)P(D) - Q(D)R(D)\big\}x_1(t) = S(D)f_1(t) - Q(D)f_2(t)$$

を得る．この方程式が解ければ，その結果を第１式，もしくは第２式に代入して，$x_2(t)$ に関する単独の方程式を得る．

例題７：次の連立微分方程式を解け．

$$\begin{cases} x_1'(t) = x_2(t) + t\cos t \\ x_2'(t) = 2x_1(t) - t\sin t - \cos t \end{cases}$$

（解説）これは１階行列形の非斉次方程式である．講義中にやった一般論によれば「基本行列を求めて，定理 4.3.1 を適用」ということになる．一方，例題６でも述べたように別の方法で解くこともできる．ここでは両方の解法でやってみよう．２つの解法を見比べて，よく吟味してもらいたい．

（例題７の解その１）例題６の第２解法のアイデアでやってみる．与えられた連立方程式は

$$\begin{cases} Dx_1(t) - x_2(t) = t\cos t \\ 2x_1(t) - Dx_2(t) = t\sin t + \cos t \end{cases}$$

と書ける．第１式に D を施して

$$D^2x_1(t) - Dx_2(t) = -t\sin t + \cos t.$$

第２式と辺々引き算して，

$$(D^2-2)x_1(t) = (D-\sqrt{2})(D+\sqrt{2})x_1(t) = -2t\sin t.$$

対応する斉次方程式 $(D-\sqrt{2})(D+\sqrt{2})x_1(t) = 0$ の一般解は

$$C_1e^{\sqrt{2}t} + C_2e^{-\sqrt{2}t}.$$

方程式 $(D^2-2)x_1 = -2t\sin t$ の特殊解を求めるために，

$$\begin{aligned} &(D^2-2)x_1 = P(D)x_1(t) = -2te^{\sqrt{-1}t} \\ &\quad\Leftrightarrow\quad e^{-\sqrt{-1}t}P(D)x_1(t) = P(D-\sqrt{-1})e^{-\sqrt{-1}t}x_1(t) = -2t \end{aligned}$$

を考える．ここで

$$\begin{aligned} P(D-\sqrt{-1}) &= (D-\sqrt{-1})^2 - 2 = D^2 - 2\sqrt{-1}D - 3 \\ &= -3\left\{1 - \left(-\frac{2}{3}\sqrt{-1}D + \frac{1}{3}D^2\right)\right\} \end{aligned}$$

であるから，$P(D-\sqrt{-1})y_1(t) = -2t$ の特殊解として，

$$\begin{aligned} y_1(t) &= \left\{1 + \left(-\frac{2}{3}\sqrt{-1}D + \frac{1}{3}D^2\right)\right\}\frac{2}{3}t \\ &= \frac{2}{3}t - \frac{4}{9}\sqrt{-1} \end{aligned}$$

がとれる．したがって，

$$x_1(t) = e^{\sqrt{-1}t}y_1(t) = \frac{2}{3}t\cos t - \frac{4}{9}\sin t + \sqrt{-1}\left(\frac{4}{9}\cos t + \frac{2}{3}t\sin t\right)$$

は $x_1'' - 2x_1 = P(D)x_1(t) = -2te^{\sqrt{-1}t}$ の特殊解である．両辺の虚部をとって

$$x_1(t) = \frac{4}{9}\cos t + \frac{2}{3}t\sin t$$

が方程式 $(D^2-2)x_1=-2t\sin t$ の特殊解となる．よって方程式 $(D^2-2)x_1=-2t\sin t$ の一般解は

$$x_1(t)=C_1e^{\sqrt{2}t}+C_2e^{-\sqrt{2}t}+\frac{4}{9}\cos t+\frac{2}{3}t\sin t.$$

与えられた連立微分方程式の第１式から

$$\begin{aligned}x_2(t)&=x_1'(t)-t\cos t\\&=\left(\sqrt{2}C_1e^{\sqrt{2}t}-\sqrt{2}C_2e^{-\sqrt{2}t}+\frac{2}{9}\sin t+\frac{2}{3}t\cos t\right)-t\cos t\\&=\sqrt{2}C_1e^{\sqrt{2}t}-\sqrt{2}C_2e^{-\sqrt{2}t}+\frac{2}{9}\sin t-\frac{1}{3}t\cos t.\end{aligned}$$

以上より答は

$$\begin{aligned}x_1(t)&=C_1e^{\sqrt{2}t}+C_2e^{-\sqrt{2}t}+\frac{4}{9}\cos t+\frac{2}{3}t\sin t\\x_2(t)&=\sqrt{2}C_1e^{\sqrt{2}t}-\sqrt{2}C_2e^{-\sqrt{2}t}+\frac{2}{9}\sin t-\frac{1}{3}t\cos t\end{aligned}$$

（解法その２：講義中にやった解法）与えられた方程式を行列形に直せば

$$\begin{pmatrix}x_1'(t)\\x_2'(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1\\2&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1(t)\\x_2(t)\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}t\cos t\\-t\sin t-\cos t\end{pmatrix}\tag{$*$}$$

よって対応する斉次方程式は

$$\begin{pmatrix}x_1'(t)\\x_2'(t)\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}x_1(t)\\x_2(t)\end{pmatrix}\qquad\left(A=\begin{pmatrix}0&1\\2&0\end{pmatrix}\right).$$

A の固有方程式は $z^2-2=0$ で，固有値は $\pm\sqrt{2}$．したがって

$$P_1=\frac{1}{\sqrt{2}-(-\sqrt{2})}(A-(-\sqrt{2})E)=\frac{1}{2\sqrt{2}}\begin{pmatrix}\sqrt{2}&1\\2&\sqrt{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&\frac{1}{2\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{2}\end{pmatrix},$$

$$P_2=\frac{1}{-\sqrt{2}+\sqrt{2}}(A-(\sqrt{2})E)=-\frac{1}{2\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-\sqrt{2}&1\\2&-\sqrt{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&-\frac{1}{2\sqrt{2}}\\-\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{2}\end{pmatrix}.$$

ゆえに

$$\begin{aligned}\exp tA&=e^{\sqrt{2}t}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&\frac{1}{2\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{2}\end{pmatrix}+e^{-\sqrt{2}t}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&-\frac{1}{2\sqrt{2}}\\-\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{2}\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\left(e^{\sqrt{2}t}+e^{-\sqrt{2}t}\right)&\frac{1}{2\sqrt{2}}\left(e^{\sqrt{2}t}-e^{-\sqrt{2}t}\right)\\\frac{1}{\sqrt{2}}\left(e^{\sqrt{2}t}-e^{-\sqrt{2}t}\right)&\frac{1}{2}\left(e^{\sqrt{2}t}+e^{-\sqrt{2}t}\right)\end{pmatrix}\end{aligned}$$

一般論から，これが斉次方程式の基本行列 $V(t)$ なのであった．したがって斉次方程式の一般解は C_1, C_2 を定数として

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\left(e^{\sqrt{2}t} + e^{-\sqrt{2}t}\right) \\ \frac{1}{\sqrt{2}}\left(e^{\sqrt{2}t} - e^{-\sqrt{2}t}\right) \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(e^{\sqrt{2}t} - e^{-\sqrt{2}t}\right) \\ \frac{1}{2}\left(e^{\sqrt{2}t} + e^{-\sqrt{2}t}\right) \end{pmatrix}$$
$$= e^{\sqrt{2}t} \begin{pmatrix} \frac{C_1}{2} + \frac{C_2}{2\sqrt{2}} \\ \frac{C_1}{\sqrt{2}} + \frac{C_2}{2} \end{pmatrix} + e^{-\sqrt{2}t} \begin{pmatrix} \frac{C_1}{2} - \frac{C_2}{2\sqrt{2}} \\ -\frac{C_1}{\sqrt{2}} + \frac{C_2}{2} \end{pmatrix}.$$

ここで

$$C_1' = \frac{C_1}{2} + \frac{C_2}{2\sqrt{2}}, \quad C_2' = \frac{C_1}{2} - \frac{C_2}{2\sqrt{2}}$$

とおけば,

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = C_1' e^{\sqrt{2}t} \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} + C_2' e^{-\sqrt{2}t} \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} C_1' e^{\sqrt{2}t} + C_2' e^{-\sqrt{2}t} \\ \sqrt{2} C_1' e^{\sqrt{2}t} - \sqrt{2} C_2' e^{-\sqrt{2}t} \end{pmatrix}$$

と書けることに注意しよう．

ところで定理 4.3.1 によって非斉次方程式の一般解を求めるには，基本行列の逆行列 $V(t)^{-1}$ を求める必要があった．今の場合，$V(t) = \exp tA$ なので，逆行列は簡単に求めることができる．実際,

$$(\exp tA)^{-1} = \exp(-tA)$$

である．

($\because$) A と $-A$ は可換だから，補題 6.1.2 より

$$(\exp tA)(\exp(-tA)) = (\exp(-tA))(\exp tA) = \exp t(A - A) = E$$

これは $(\exp tA)^{-1} = \exp(-tA)$ に他ならない． $\square$

今の場合,

$$V(t)^{-1} = \exp(-tA)$$
$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\left(e^{-\sqrt{2}t} + e^{\sqrt{2}t}\right) & \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(e^{-\sqrt{2}t} - e^{\sqrt{2}t}\right) \\ \frac{1}{\sqrt{2}}\left(e^{-\sqrt{2}t} - e^{\sqrt{2}t}\right) & \frac{1}{2}\left(e^{-\sqrt{2}t} + e^{\sqrt{2}t}\right) \end{pmatrix}$$

である．あとは定理 4.3.1 によって特殊解を構成すればよい．

$$V(t)^{-1}\mathbf{f}(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\left(e^{-\sqrt{2}t} + e^{\sqrt{2}t}\right) & \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(e^{-\sqrt{2}t} - e^{\sqrt{2}t}\right) \\ \frac{1}{\sqrt{2}}\left(e^{-\sqrt{2}t} - e^{\sqrt{2}t}\right) & \frac{1}{2}\left(e^{-\sqrt{2}t} + e^{\sqrt{2}t}\right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t\cos t \\ -t\sin t - \cos t \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} \frac{t\cos t}{2}\left(e^{-\sqrt{2}t} + e^{\sqrt{2}t}\right) - \frac{t\sin t + \cos t}{2\sqrt{2}}\left(e^{-\sqrt{2}t} - e^{\sqrt{2}t}\right) \\ \frac{t\cos t}{\sqrt{2}}\left(e^{-\sqrt{2}t} - e^{\sqrt{2}t}\right) - \frac{t\sin t + \cos t}{2}\left(e^{-\sqrt{2}t} + e^{\sqrt{2}t}\right) \end{pmatrix}$$

右辺の各成分を 0 から t まで積分した結果が

$$\int_0^t V(\tau)^{-1}\mathbf{f}(\tau)d\tau$$

である[2]．これを計算しておいてから，このタテベクトルに左から $V(t)=\exp tA$ を掛けることで特殊解 $\mathbf{x}_0(t)$ が得られる．途中の計算を書くとものすごく長くなってしまうので，最終的な結果のみ書くと，

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_0(t) &= V(t)\int_0^t V(\tau)^{-1}\mathbf{f}(\tau)d\tau \\ &= \begin{pmatrix} \frac{4}{9}\cos t + \frac{2}{3}t\sin t \\ \frac{2}{9}\sin t - \frac{1}{3}t\cos t \end{pmatrix} - \frac{2}{9}e^{\sqrt{2}t}\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} - \frac{2}{9}e^{-\sqrt{2}t}\begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix}\end{aligned}$$

となる．先に求めた斉次方程式の一般解と併せれば，求める方程式の一般解は

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} &= (C_1'-2/9)e^{\sqrt{2}t}\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} + (C_2'-2/9)e^{-\sqrt{2}t}\begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix} \\ &\quad + \begin{pmatrix} \frac{4}{9}\cos t + \frac{2}{3}t\sin t \\ \frac{2}{9}\sin t - \frac{1}{3}t\cos t \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} C_1''e^{\sqrt{2}t} + C_2''e^{-\sqrt{2}t} + \frac{4}{9}\cos t + \frac{2}{3}t\sin t \\ \sqrt{2}C_1''e^{\sqrt{2}t} - \sqrt{2}C_2''e^{-\sqrt{2}t} + \frac{2}{9}\sin t - \frac{1}{3}t\cos t \end{pmatrix}\end{aligned}$$

となる．ただし $C_1''=C_1'-2/9$, $C_2''=C_2'=2/9$．この結果は（もちろん）第 1 の解法の結果と一致する．

（コメント）第 2 の解法は理論的にはもちろん正しいけれど「実行しようとすると，かなり計算量が増える」ということは納得してもらえると思う．このように「1 階行列化して定理 4.3.1 を用いる方法」は,「与えられた方程式を実際に方程式を解く」という意味からすれば，あまり現実的ではない．もとろんそれ以外に解く方法が無ければ仕方ないが，この例のように非斉次項が三角関数や指数関数，多項式関数，もしくはそれらの積で与えられている場合には，別の方法で解いた方が，ずっと速い．

さらに別の解き方として「ラプラス変換を用いた解法」もあることに注意しておく．

例題 8：次の連立微分方程式を解け．

$$\begin{cases} x_1''(t) = 3x_1(t) + 4x_2(t) - 2 \\ x_2''(t) = -x_1(t) - x_2(t) - 6 \end{cases}$$

（解説）今度は高階の連立方程式である.「2 つの連立方程式からうまくどちらかの未知関数を消去して，未知関数 1 つの単独方程式に持っていく」という例題 6 の第 2 解法で述べたアイデアを用いいれば，同じように解くことが出来る．

（解）与えられた方程式を

$$\begin{cases} (D^2-3)x_1(t) - 4x_2(t) = -2 \\ x_1(t) + (D^2+1)x_2(t) = -6 \end{cases}$$

[2] まじめにやるとかなり面倒だが，面倒なだけで難しくはない.「数学 I」の範囲で十分計算出来る．

と書き直す．第１式に (D^2+1) を施し，第２式を 4 倍して辺々加える：

$$\begin{aligned}
&(D^2+1)\big\{(D^2-3)x_1(t)-4x_2(t)\big\}+4\big\{x_1(t)+(D^2+1)x_2(t)\big\}\\
&\quad=(D^4-2D^2+1)x_1(t)\\
&\quad=(D-1)^2(D+1)^2x_1(t)\\
&\quad=-26.
\end{aligned}$$

解くべき非斉次方程式 $(D^4-2D^2+1)x_1(t)=-26$ の特殊解として，

$$x_1(t)=-26 \quad （定数関数）$$

が取れる．ゆえにその一般解は

$$x_1(t)=C_1e^t+C_2te^t+C_3e^{-t}+C_4te^{-t}-26.$$

第１式に代入して

$$\begin{aligned}
x_2(t)&=\frac{1}{4}\left\{(D^2-3)\big(C_1e^t+C_2te^t+C_3e^{-t}+C_4te^{-t}-26\big)+2\right\}\\
&=\frac{1}{2}(C_1-C_2-C_1t)e^t-\frac{1}{2}(C_3+C_4+C_3t)e^{-t}+20.
\end{aligned}$$

<u>例題９</u>：次の連立微分方程式を解け．

$$\begin{cases}
x_1'(t)+x_2'(t)+5x_1(t)+7x_2(t) &= 2\\
2x_1'(t)+3x_2'(t)+x_1(t)+x_2(t) &= \sin t
\end{cases}$$

（解説と解答）D を用いて整理すると，

$$\begin{cases}
(D+5)x_1(t)+(D+7)x_2(t) &= 2\\
(2D+1)x_1(t)+(3D+1)x_2(t) &= \sin t
\end{cases}$$

となる．第１式に $(3D+1)$, 第２式に $(D+7)$ を施すと，

$$\begin{cases}
(3D+1)(D+5)x_1(t)+(3D+1)(D+7)x_2(t) &= (3D+1)2=2\\
(D+7)(2D+1)x_1(t)+(D+7)(3D+1)x_2(t) &= (D+7)\sin t=\cos t+7\sin t
\end{cases}$$

第１式から第２式を引くと，

$$\begin{aligned}
\{(3D+1)(D+5)-(D+7)(2D+1)\}x_1(t)&=(D^2+D-2)x_1(t)\\
&=2-\cos t-7\sin t
\end{aligned}$$

得られた $x_1(t)$ に対する微分方程式を解いて，

$$x_1(t)=C_1e^t+C_2e^{-2t}+\cos t+2\sin t-1 \quad (C_1, C_2\text{は定数})$$

を得る．

一方，もとの方程式の第１式に $(2D+1)$, 第２式に $(D+5)$ を施すと

$$\begin{cases}
(2D+1)(D+5)x_1(t)+(2D+1)(D+7)x_2(t) &= (2D+1)2=2\\
(D+5)(2D+1)x_1(t)+(D+5)(3D+1)x_2(t) &= (D+5)\sin t=\cos t+5\sin t
\end{cases}$$

ここで第２式から第１式を引くと,

$$\begin{aligned}\{(D+5)(3D+1)-(2D+1)(D+7)\}x_2(t) &= (D^2+D-2)x_2(t)\\ &= \cos t+5\sin t-2\end{aligned}$$

この $x_2(t)$ に対する方程式を解くと,

$$x_2(t)=C_3e^t+C_4e^{-2t}-\frac{4\cos t}{5}-\frac{7\sin t}{5}+1\quad (C_3, C_4\text{は定数}).$$

『これで答がでた!』と思ってしまいがちだが，一つの疑問が生じる.

[疑問]　これは１階の連立方程式だから，任意定数（解のパラメータ）は２個のはず（つまり，初期条件として $x_1(0)$ と $x_2(0)$ を決めれば，解は一意的に決まるはず！）なのに，パラメータが C_1, C_2, C_3, C_4 と４つも入ってしまうのは，なぜか？

[答]　C_1, C_2, C_3, C_4 の間には非自明な関係式があって，これらを自由に選ぶことは出来ない．この場合，<u>自由に選ぶことができるパラメータの数は，２個である</u>.

具体的に説明しよう．上で求めた解に $t=0$ を代入して

$$x_1(0)=C_1+C_2$$

を得る．また,

$$x_1'(t)=C_1e^t-2C_2e^{-2t}-\sin t+2\cos t$$

だから,

$$x_1'(0)=C_1-2C_2+2$$

である．同様に,

$$x_2(0)=C_3+C_4+\frac{1}{5},\qquad x_2'(0)=C_3-2C_4-\frac{7}{5}$$

である.

一方，与えられた微分方程式に $t=0$ を代入すれば,

$$\left\{\begin{array}{lcl} x_1'(0)+x_2'(0)+5x_1(0)+7x_2(0) &=& 2\\ 2x_1'(0)+3x_2'(0)+x_1(0)+x_2(0) &=& \sin 0=0\end{array}\right.$$

である．よって

$$\begin{aligned}&(C_1-2C_2+2)+\left(C_3-2C_4-\frac{7}{5}\right)+5(C_1+C_2)+7\left(C_3+C_4+\frac{1}{5}\right)\\ &=6C_1+4C_2+8C_3+5C_4+2\\ &=2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&2(C_1-2C_2+2)+3\left(C_3-2C_4-\frac{7}{5}\right)+(C_1+C_2)+\left(C_3+C_4+\frac{1}{5}\right)\\ &=3C_1-3C_2+4C_3-5C_4\\ &=0\end{aligned}$$

を得る．整理して C_1, C_2, C_3, C_4 に関する連立方程式

$$\begin{cases} 6C_1 + 4C_2 + 8C_3 + 5C_4 &= 0 \\ 3C_1 - 3C_2 + 4C_3 - 5C_4 &= 0 \end{cases}$$

を得る．これを C_1, C_2 を定数と見て，C_3, C_4 について解けば

$$C_3 = -\frac{3}{4}C_1 - \frac{1}{12}C_2, \qquad C_4 = -\frac{2}{3}C_2$$

となる．ゆえに一般解は，

$$x_1(t) = C_1e^t + C_2e^{-2t} + \cos t + 2\sin t - 1$$
$$x_2(t) = -\frac{9C_1 + C_2}{12}e^t - \frac{2C_2}{3}e^{-2t} - \frac{4\cos t}{5} - \frac{7\sin t}{5} + 1.$$

解き方によっては，一見 C_1, C_2, C_3, C_4 なる４つのパラメータを持つようにも思えるけれども,「連立方程式を満たす」との要請から，これらは自由に動くことが出来ず，一般解は２個のパラメータ（任意定数）を持つことになる．連立型の微分方程式を解く場合には常にこのような配慮もしていかなければならない.

例題１０：次の連立微分方程式を解け.

$$\begin{cases} x_1'''(t) + x_2'''(t) + x_1'(t) + x_2(t) &= t^2 \\ x_1''(t) + x_2''(t) + x_1(t) + x_2'(t) &= e^t \end{cases}$$

（解答と解説）まず D を使って整理すると，

$$\begin{cases} (D^3 + D)x_1(t) + (D^3 + 1)x_2(t) &= t^2 \\ (D^2 + 1)x_1(t) + (D^2 + D)x_2(t) &= e^t \end{cases}$$

となる．第２式に D を施してから，第１式 – 第２式を考えると

$$(1 - D^2)x_2(t) = t^2 - e^t$$

を得る．これを解くと

$$x_2(t) = C_1e^t + C_2e^{-t} + t^2 + 2 + \frac{e^t(1+t)}{2}.$$

あとはこの結果を第１式もしくは，第２式に代入して，$x_1(t)$ に関する単独の方程式を解けばよい．ところが，一見すると，第１式に代入する場合は $x_1(t)$ に関する３階の方程式が得られるので，パラメータ（定数）は３個．ところが，第２式に代入する場合は $x_1(t)$ に関する２階の方程式が得られるので，パラメータ（定数）は２個となり，つじつまが合わないような気がするかもしれない.

もちろん，そんなことはなく，どちらで解いても同じ答が得られるのだが，そのカラクリは例題９の場合と同じところから来ているのである.

まず，第１式に代入してみる：

$$\begin{aligned}(D^3 + D)x_1(t) &= t^2 - (D^3 + 1)x_2(t) \\ &= -\left(t + 2C_1 + \frac{5}{2}\right)e^t - 2\end{aligned}$$

左辺の微分多項式が

$$D^3 + D = D(D^2 + 1)$$

と因数分解できることに注意しよう．上式の両辺を１回積分すると

$$(D^2 + 1)x_1(t) = -\left(t + 2C_1 + \frac{3}{2}\right)e^t - 2t + C_3 \tag{1}$$

となる．一方，第２式に代入すると，

$$\begin{aligned}(D^2 + 1)x_1(t) &= e^t - (D^2 + D)x_2(t) \\ &= -\left(t + 2C_1 + \frac{3}{2}\right)e^t - 2t - 2\end{aligned}$$

この式と (1) を比べれば，

$$C_3 = -2$$

であることがわかる．つまり，第１式に代入する方法から生ずる積分定数 C_3 は,「解が連立方程式を満たさなければならない」という要請から，$C_3 = -2$ に決まってしまうのである（例題９の場合と同じカラクリ！）．

あとは

$$(D^2 + 1)x_1(t) = -\left(t + 2C_1 + \frac{3}{2}\right)e^t - 2t - 2 \tag{1$'$}$$

を解けばよく，

$$x_1(t) = C_4 e^{\sqrt{-1}t} + C_5 e^{-\sqrt{-1}t} - \left(\frac{t}{2} + C_1 + \frac{1}{4}\right)e^t - 2t - 2$$

となる．また実数解は

$$x_1(t) = C_4 \cos t + C_5 \sin t - \left(\frac{t}{2} + C_1 + \frac{1}{4}\right)e^t - 2t - 2$$

この結果をもとの微分方程式に代入して $t = 0$ を代入してみれば,

$$0 = 0$$

という自明な関係式しか得られないことがわかり，したがって

$$\begin{aligned}x_1(t) &= C_4 \cos t + C_5 \sin t - C_1 e^t - \frac{(2t+1)e^t}{4} - 2t - 2 \\ x_2(t) &= C_1 e^t + C_2 e^{-t} + t^2 + 2 + \frac{e^t(1+t)}{2}\end{aligned}$$

が一般解（C_1, C_2, C_4, C_5 は任意定数）であることがわかる．つまり，この微分方程式の解は４個のパラメータを持っていることになる．