２０１０年度数理科学II期末試験問題

（７月２１日：１０：５５〜１２：２５）

担当：斉藤　義久

[1] 次の微分方程式を解け.

(1) $x' = \cos(t+x)$　　(2) $x' = \dfrac{x-t}{x+t}$

(3) $\left(t\cos\dfrac{x}{t} + x\sin\dfrac{x}{t}\right)x + \left(t\cos\dfrac{x}{t} - x\sin\dfrac{x}{t}\right)tx' = 0$

[2] 次の微分方程式が全微分型であるための必要十分条件を求めよ．またそのとき方程式を解け．ただし $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2$ は全て定数である．

$$(a_1t^2 + b_1tx + c_1x^2) + (a_2t^2 + b_2tx + c_2x^2)x' = 0.$$

[3] 次の微分方程式の実数解を求めよ．

(1) $x'' - 5x' + 6x = 0$　　(2) $x''' - 3x' - 2x = 0$

(3) $x^{(4)} + 2x'' + x = \sin t + \cos 2t$　　(4) $x^{(5)} + x^{(4)} + x''' + x'' + x' + x = \sin t + e^{-t}$

[4] 隣り合う３個の質点がバネにつながれて１直線上に並んでいる系を考える.

質点の質量は全て同じ $(= m)$ で，バネも全て同じバネ定数 $(= k > 0)$ とする．

(1) 左から i 番目の質点の変位を $x_i(t)$ $(i = 1, 2, 3)$ とするとき，各質点の運動方程式を求めよ．ただし床からの摩擦は無視出来るものとする．

(2) 初期条件：$x_i(0) = 0$ $(i = 1, 2, 3)$, $x_1'(0) = x_2'(0) = 0$, $x_3'(0) = 1$ の下に，上の運動方程式を解け.

[5] 次の連立微分方程式を解け.

$$x'' - y = 4\cos t \qquad y'' - x = 4\sin t$$

ただし，$x,\ y$ は t の関数である．

[6] 微分方程式

$$4tx'' + 2x' + x = 0$$

は $t = 0$ を確定特異点に持つ．このことを利用して以下の問いに答えよ．

(1) $t = 0$ における決定方程式を求めよ．

(2) $t = 0$ における級数解を求めよ．

(3) $t \geq 0$ のとき，(2) で求めた級数解を初等関数で書き表せ.