

2010年度夏学期数学IB 中間試験問題

(2010年6月2日 16:20~17:50)

担当：斉藤 義久

[1] $f(x)$ と a および n を以下のように与えるとき，テイラーの定理を用いて $f(x)$ を $x - a$ の n 次多項式で近似せよ．

(1) $f(x) = \sin x$, $a = 1$, $n = 7$ (ただし $\sin 1 = \alpha$, $\cos 1 = \beta$ として答えよ.)

(2) $f(x) = \sqrt{1+x}$, $a = 0$, n は任意

[2] 次の関数の1階偏導関数を全て求めよ．

(1) $x^3 - 3xy + y^3$ (2) $\sin\left(\frac{x}{y}\right) + \sin(xy)$ (3) $x^y - y^x$

[3] $f(x, y)$ と (a, b) を以下のように与えるとき，曲面 $z = f(x, y)$ の $(a, b, f(a, b))$ における接平面を求めよ．

(1) $f(x, y) = x^4 + 2xy^2$, $(a, b) = (1, 2)$

(2) $f(x, y) = \sin(x + 2y)$, $(a, b) = \left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{12}\right)$

[4] $f = f(x, y)$ は C^2 -級とする． $z = f(x, y)$, $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$ とする．

(1) z の r, θ に関する1階の偏導関数を， z の x, y に関する1階偏導関数，および x, y を用いて表せ．

(2) z の r, θ に関する2階の偏導関数を， z の x, y に関する1階，2階の偏導関数，および x, y を用いて表せ．

[5] 2変数の C^2 -級関数 $f = f(x, y)$ が $\partial_{xx}f = \partial_{yy}f$ を満たすための必要十分条件を求めよ (ただし $\partial_{xy}f = 0 \Leftrightarrow f(x, y) = g(x) + h(y)$ は証明せずに用いて良い.)

[6] (1) 「2変数関数 $f(x, y)$ が (a, b) で連続である」ことの定義を $\varepsilon - \delta$ 論法を用いて正確に書け．

以下， $f(x, y)$ を次のように定める：

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sin(\sqrt{x^2 + y^2})} & (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

(2) $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$ とする． $(x, y) \neq (0, 0)$ のとき， f を r と θ で書け．

(3) $f(x, y)$ は $(0, 0)$ で連続であることを示せ．