

2010年度数学IB夏学期期末試験問題

9月1日：10：55～12：25（90分）

担当：斉藤 義久

[1] 次の関数の2階偏導関数を全て求めよ（答のみでよい）。

(1)  $\log(x^2 + xy + y^2)$       (2)  $\sin(x \cos y)$

[2] 次の関数の極値と、それを与える点を求めよ。

(1)  $x^3 + y^2 + 2xy + y$       (2)  $\sin x \sin y \sin(x + y)$

[3] 次の問いに答えよ。ただし、解答は答のみでよい。

(1)  $f(x, y)$  を  $C^2$ -級関数とし、 $f(a, b) = 0$  かつ  $\partial_y f(a, b) \neq 0$  とする。陰関数定理によれば、 $(a, b)$  の近傍で  $y = \varphi(x)$  と書ける。このとき  $y = \varphi(x)$  の2階の導関数を  $f$  の1階、および2階の偏導関数を用いて書き表せ。ただし  $y = \varphi(x)$  が  $C^2$ -級であることは証明せずに用いてよい。

(2)  $g(x, y, z)$  を  $C^2$ -級関数とし、 $g(a, b, c) = 0$  かつ  $\partial_z g(a, b, c) \neq 0$  とする。陰関数定理によれば、 $(a, b, c)$  の近傍で  $z = \psi(x, y)$  と書ける。このとき  $z = \psi(x, y)$  の全ての2階の偏導関数を  $g$  の1階、および2階の偏導関数を用いて書き表せ。ただし  $z = \psi(x, y)$  が  $C^2$ -級であることは証明せずに用いてよい。

[4] 条件  $xy + yz + zx = 3a^2$  ( $a > 0$ ) の下に  $f = xyz$  の極値を求めよ。

[5] 曲面  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$  ( $a, b, c > 0$ ) に内接する直方体のうちで、体積が最大になるものを求めよ。

[6] 条件  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ ,  $x^2 + y^2 + z^2 = d^2$  ( $0 < a < b < c < d$ ) の下に、 $z^2$  の最大値・最小値を求めよ。

（答案作成上の注意）

- 講義中にやったかどうかに関わらず、知っている知識は何でも使って解いて良い。ただし、講義中にやらなかった定理・性質等を用いる場合には「どんな定理を使ったのか」を明記すること。
- 「答のみ」との指定がない場合は記述式の問題であるので、そのつもりで答案を作成すること。
- 判読不能の文字、文章として日本語の体裁をなしていない答案は、仮に好意的に解釈すれば正解と言えなくもない場合でも0点にする場合があるので、注意すること。特に、計算を書きながっただけの解答は単なるメモ書きと解釈し、答案とは認めない。