２０１０年度冬学期 数学IB レポート課題（その２）

担当：斉藤　義久

試験の結果が「思わしくない」と思う者は，以下の問題を解いてレポートとして提出すること．ただし，以下の注意事項を熟読の上，提出するかしないかは各自の判断に任せる．

注意事項

- 講義の始めに通知したように，成績は基本的に中間試験および期末試験の結果のみでつける．
- ２回の試験の結果が合格点に達している場合は，このレポート課題の結果は一切成績に反映させない．
- 試験の結果が合格点に達していない場合にのみ，このレポート課題の結果を試験の成績にプラスして最終的な成績とする．ただし，その場合の最終的な成績は高々５０点である．
- 必ずしも全ての問いに答えなくてもよいので，出来た範囲で解答し提出すること．ただし，正答数が多いほど得点が高くなるのは，言うまでもない．

提出方法

- 提出先：アドミニストレーション棟１階のレポートボックス
- 提出期間：講義中に口頭で伝える．
- 上記以外の方法は認めない．特に期限が過ぎてからの直接提出は絶対に認めないので注意すること．

補足

- 試験の結果に自信がある場合でも，問題には目を通しておくことを勧める．（試験前に問題を配ることの意味を各自よく考えること.）

[1] D と $f(x,y)$ を以下のように与える時，積分 $\displaystyle\int\int_D f(x,y)dxdy$ の値を計算せよ．

(1) $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 2\}, \quad f(x,y) = xy^2.$

(2) $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \le x \le 2,\ 2 \le y \le 3\}, \quad f(x,y) = \dfrac{1}{x+y}.$

(3) $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le x \le \pi,\ 0 \le y \le \pi/2\}, \quad f(x,y) = x\sin(x+y).$

(4) $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1\}, \quad f(x,y) = \dfrac{y^2}{x^2y^2+1}.$

(5) D は $(0,0),\ (0,\pi),\ (\pi,\pi)$ を頂点とする三角形，$\quad f(x,y) = \cos(x+y).$

(6) $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le \sqrt{x}\}, \quad f(x,y) = e^y.$

(7) D は $y = x^2$ と $x = y^2$ で囲まれる領域，$\quad f(x,y) = \sqrt{xy}.$

(8) $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \sqrt{x} + \sqrt{y} \le 1,\ x \ge 0,\ y \ge 0\}, \quad f(x,y) = xy.$

[2] D と $f(x,y)$ を以下のように与える時，広義積分 $\displaystyle\int\int_D f(x,y)dxdy$ の収束性を判定せよ．また，収束する場合には，その値を求めよ．

(1) D は $(0,0),\ (0,1),\ (1,1)$ を頂点とする三角形，$\quad f(x,y) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$

(2) D は上問と同じ，$\quad f(x,y) = \dfrac{1}{\sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}}.$

(3) D は $y = x^2$ と $y = x$ が囲む領域，$\quad f(x,y) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-y^2}}.$

(4) $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \ge 1,\ 0 \le y \le x^{-2}\}, \quad f(x,y) = \dfrac{1}{xy}.$

(5) $D = \mathbb{R}^2, \quad f(x,y) = \dfrac{1}{x^2+y^2+1}.$

(6) D は第１象限，$\quad f(x,y) = (x+y)e^{-x-y}.$

(7) $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le x \le y\}, \quad f(x,y) = e^{-y^2}.$

(8) $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1\}, \quad f(x,y) = \dfrac{1}{x+y}.$

[3] D と f を以下のように与える時，関数 f の D 上での積分の値を計算せよ．広義積分の場合には収束性も判定せよ．

(1) $D = \mathbb{R}^2, \quad f(x,y) = (x^2+y^2)e^{-x^2-y^2}$.

(2) $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq x,y,z \leq \pi/2\}, \quad f(x,y,z) = \sin(x+y+z)$.

(3) $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \leq 1\}, \quad f(x,y) = \dfrac{1}{\sqrt{-x^2-y^2}}$.

(4) $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+y^2 \leq 1\}, \quad f(x,y,z) = \dfrac{1}{\sqrt{-x^2-y^2-z^2}}$.

(5) $D = \mathbb{R}^2, \quad f(x,y) = \dfrac{1}{(x^2+y^2+1)^a}$.

(6) $D = \mathbb{R}^2, \quad f(x,y) = (x+y)e^{-x^2-y^2}$.

(7) $D = \{(x_1,x_2,\cdots,x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1+x_2+\cdots+x_n \leq a\} \quad (a>0)$,
$f(x_1,x_2,\cdots,x_n) = x_1x_2\cdots x_n$.

[4] 次の図形 V の体積を求めよ．

(1) $V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2 \leq a^2,\ 0 \leq z \leq x^2\} \quad (a>0)$.

(2) $V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid \sqrt{x}+\sqrt{y} \leq 1,\ z^2 \leq xy\}$.

(3) 半径 $a>0$ の互いに直交する 2 つの円柱がある時，V はその共通部分．

(4) $V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}+z^{\frac{2}{3}} \leq a^{\frac{2}{3}}\} \quad (a>0)$.

(5) $V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid |xy| \leq 1,\ |xz| \leq 1,\ |yz| \leq 1\}$.

(6) $V = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; |x|+|y| \leq \dfrac{1}{|z|},\ |y|+|z| \leq \dfrac{1}{|x|},\ |z|+|x| \leq \dfrac{1}{|y|}\right\}$.

[5] 次の図形の表面積を求めよ．

(1) 球面 $x^2+y^2+z^2=a^2\ (a>0)$ の，$b \leq x \leq c$ の部分（ただし $-a \leq b < c \leq a$）.

(2) 曲面 $z^2 = 4ax\ (a>0)$ のうち，$y^2 \leq ax - x^2$ を満たす部分．

(3) xy 平面内の曲線 $r = a(1+\cos\theta)\ (a>0)$ を x 軸の回りに 1 回転して得られる曲面．

(4) 次のようにパラメータ表示される曲面：

$$x = u^2,\ y = \sqrt{2}uv,\ z = v^2; \quad u^2+v^2 \leq 1.$$

[6] ドーナツ型の表面を表す式を書け．また，その内部の体積と表面積を求めよ．