

2010年度冬学期・数学IBプリント(その2)  
(2010年12月8日配布)

担当：斉藤 義久

今回は、講義中に紹介したディレクレ積分：

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx$$

の値を計算する方法を紹介する．計算は結構難しいけれども，敢えて紹介したい理由は

抽象的な一般論よりも具体的な計算の方がずっと難しいこともある  
ということを経験して欲しいからである．

本学では微積の講義がAコースとBコースに分かれており，とかく「Aの方がBよりも難しい」と思われがちであるが，そんなことはない．抽象的な一般論というのは最初の敷居こそ高いかも知れないが，慣れてさえしまえばどうということはない．それに比べると具体的な計算の方がずっと難しいことも多いのである．

前置きはこれくらいにして，本論に入ろう．ディレクレ積分の計算はなかなか難しく，すぐには出来ない．まず準備から始める．

定理1 (リーマン・ルベークの定理)

$f(x)$  を  $[a, b]$  上の連続関数とするととき，次の等式が成り立つ．

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) \sin t x dx = 0.$$

(証明) 極限を取っている関数は  $t$  の関数であることに注意しよう． $\varepsilon - \delta$  論法を用いれば，次を示せば良いことになる：

任意の  $\varepsilon > 0$  に対して，ある  $t_0$  が存在して，

$$t > t_0 \quad \Rightarrow \quad \left| \int_a^b f(x) \sin t x dx \right| < \varepsilon.$$

$f(x)$  は閉区間上の連続関数なので，ある  $M > 0$  があって，

$$|f(x)| \leq M \quad (x \in [a, b])$$

となる．また  $f(x)$  はリーマン積分可能である．関数がリーマン積分可能であることの定義(区分求積法による定義)に戻れば， $f(x)$  はリーマン積分可能ということは次と同値：

任意の  $\varepsilon > 0$  に対して，ある  $\delta > 0$  が存在して，

$\delta > \delta(\Delta)$  なる全ての分割  $\Delta : a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$  に対し，

$$S(\Delta) - s(\Delta) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

ただし，ここで用いた記号の意味は次の通り．分割  $\Delta$  で生ずる小区間を

$$I_i = [x_{i-1}, x_i] \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

とするととき，

$$\delta(\Delta) = \max\{x_i - x_{i-1} \mid 1 \leq i \leq n\} \quad (\text{各小区間の幅の最大値}).$$

また,

$M_i = f(x)$  の  $I_i$  における最大値,  $m_i = f(x)$  の  $I_i$  における最小値

として,

$$S(\Delta) = \sum_{i=1}^n M_i(x_i - x_{i-1}), \quad s(\Delta) = \sum_{i=1}^n m_i(x_i - x_{i-1}).$$

このとき,

$$\begin{aligned} & \left| \int_a^b f(x) \sin tx dx \right| \\ & \leq \sum_{i=1}^n \left| \int_{x_{i-1}}^{x_i} (f(x) - f(x_i)) \sin tx dx \right| + \sum_{i=1}^n \left| \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x_i) \sin tx dx \right| \\ & \leq \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} |f(x) - f(x_i)| \cdot |\sin tx| dx + \sum_{i=1}^n |f(x_i)| \cdot \left| \int_{x_{i-1}}^{x_i} \sin tx dx \right| \end{aligned}$$

定義から  $|f(x) - f(x_i)| \leq M_i - m_i$ . さらに  $|\sin tx| \leq 1$  だから,

$$\begin{aligned} (\text{第1項}) & \leq \sum_{i=1}^n (M_i - m_i)(x_i - x_{i-1}) \\ & = S(\Delta) - s(\Delta) \\ & < \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned}$$

$M$  の取りからから,  $|f(x_i)| \leq M$ . したがって

$$\begin{aligned} (\text{第2項}) & \leq M \sum_{i=1}^n \left| \int_{x_{i-1}}^{x_i} \sin tx dx \right| \\ & = M \sum_{i=1}^n \frac{|\cos tx_i - \cos tx_{i-1}|}{t} \\ & \leq \frac{2nM}{t} \quad (\because |\cos tx_i - \cos tx_{i-1}| \leq 2). \end{aligned}$$

あわせて

$$\left| \int_a^b f(x) \sin tx dx \right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{2nM}{t}.$$

したがって

$$t_0 = \frac{4nM}{\varepsilon}$$

とおけば,

$$t > t_0 \Rightarrow \left| \int_a^b f(x) \sin tx dx \right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

□

この結果を使ってディリクレ積分の値を計算する .

$$f(x) = \begin{cases} \left(\frac{x}{2}\right)^{-1} - \left(\sin \frac{x}{2}\right)^{-1} & (0 < x \leq \pi) \\ 0 & (x = 0) \end{cases}$$

とおくと ,  $f(x)$  は閉区間  $[0, \pi]$  上の連続関数 . よって定理 1 から ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\pi f(x) \sin \frac{2n+1}{2} x dx = 0.$$

すなわち

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\pi \frac{\sin \frac{2n+1}{2} x}{\frac{x}{2}} dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\pi \frac{\sin \frac{2n+1}{2} x}{\sin \frac{x}{2}} dx. \quad (*)$$

よって

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\frac{2n+1}{2}\pi} \frac{\sin x}{x} dx \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\pi \frac{\sin \frac{2n+1}{2} t}{t} dt \quad \left( x = \frac{2n+1}{2} t \text{ と変数変換} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\pi \frac{\sin \frac{2n+1}{2} t}{2 \sin \frac{t}{2}} dt \quad (\because (*)). \end{aligned}$$

ここで被積分関数を

$$\begin{aligned} &\frac{\sin \frac{2n+1}{2} t}{2 \sin \frac{t}{2}} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{(\sin \frac{2n+1}{2} t - \sin \frac{2n-1}{2} t) + (\sin \frac{2n-1}{2} t - \sin \frac{2n-3}{2} t) + \cdots + (\sin \frac{3}{2} t - \sin \frac{t}{2}) + \sin \frac{t}{2}}{\sin \frac{t}{2}} \end{aligned}$$

と変形する . 三角関数の和積公式から

$$\begin{aligned} \sin \frac{2k+1}{2} t - \sin \frac{2k-1}{2} t &= 2 \cos \left( \frac{\frac{2k+1}{2} t + \frac{2k-1}{2} t}{2} \right) \sin \left( \frac{\frac{2k+1}{2} t - \frac{2k-1}{2} t}{2} \right) \\ &= 2 \cos kt \sin \frac{t}{2} \quad (k = 1, 2, \dots). \end{aligned}$$

よって

$$\frac{\sin \frac{2n+1}{2} t}{2 \sin \frac{t}{2}} = \cos nt + \cos(n-1)t + \cdots + \cos t + \frac{1}{2}.$$

これを積分の中に戻して ,

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\pi \left( \cos nt + \cos(n-1)t + \cdots + \cos t + \frac{1}{2} \right) dt \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \left[ \frac{\sin nx}{n} \right]_0^\pi + \left[ \frac{\sin(n-1)x}{n-1} \right]_0^\pi + \cdots + [\sin x]_0^\pi + \frac{\pi}{2} \right\} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ 0 + 0 + \cdots + 0 + \frac{\pi}{2} \right\} \\ &= \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

随分大変だったが、これでようやくディレクレ積分の値が計算出来たことになる。定理の形でまとめておこう。

定理 2

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}.$$

この例からも納得してもらえなことと思うが（簡単に計算出来るような場合はともかくとして）難しい具体的な計算を実行するには、いろいろ準備をしてからでないと計算出来ない場合が多い。

むしろ、抽象的な一般論というのは、このような具体例を計算するために開発されることが少なくない。具体的な計算があって初めて抽象論が生きるし、逆もまた真なのである。