

2010年度冬学期・数学IBプリント(その1)  
(2010年10月13日配布)

担当：斉藤 義久

積分計算の実例に関しては、時間の都合で講義中には十分に説明しきれないので、プリントの形で補足したい。高校のときにすでに習っている公式も多いと思うが、まとめの意味も込めて、敢えて書くことにした。

また、不定積分の計算で現れる積分定数は、煩わしいので省略してある。

1. 基本公式

まず、いくつかの基本的な関数に対する積分を列挙しよう。これらの多くは高校で習っていることと思う。

●  $x^n$  ( $n$  は整数) の積分

$$\int x^n dx = \begin{cases} \frac{1}{n+1} x^{n+1} & (n \neq -1), \\ \log|x| & (n = -1). \end{cases} \quad (1)$$

● 三角関数の積分

$$\int \sin x dx = -\cos x, \quad \int \cos x dx = \sin x. \quad (2)$$

● 指数関数・対数関数の積分

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\log a}. \quad (3)$$

$$\int (\log_a x) dx = x \left( \log_a x - \frac{1}{\log a} \right). \quad (4)$$

● 逆三角関数の微分から求まる公式

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \text{Arcsin}x. \quad (5)$$

$$\int \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \text{Arccos}x. \quad (6)$$

$$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \text{Arctan}x. \quad (7)$$

これらの公式はいずれも

「右辺の微分が、左辺の被積分関数 (= 左辺の微分) に一致する」

ことを示すことで証明される。

ただ、この方法は右辺の具体形を最初から知っていないと使えない。とはいえ、右辺の具体形が非自明なのは (4) だけだろう。知っている人も多いと思うが、念のため

め(4)の積分を計算する方法を紹介しておこう．これは部分積分の公式を使って計算される：

$$\begin{aligned}\int (\log_a x) dx &= \int (x)' (\log_a x) dx \\ &= x \log_a x - \int x (\log_a x)' dx \\ &= x \log_a x - \frac{1}{\log a} \int dx \\ &= x \left( \log_a x - \frac{1}{\log a} \right).\end{aligned}$$

これらの公式はいずれもそれほど難しいものではないが，これらと部分積分，置換積分を組み合わせることによって，多くの公式を導くことが出来る．例えば次の命題が成り立つ．

命題 1  $g(x)$  を  $C^1$ -級関数とすれば，

$$\int \frac{g'(x)}{g(x)} dx = \log |g(x)|.$$

(証明)  $f(x) = 1/x$ ,  $\varphi(t) = x$  とする．置換積分の公式より

$$\int \frac{dx}{x} = \int \frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)} dt.$$

一方，

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{x} &= \log |x| \quad (\because (1)) \\ &= \log |\varphi(t)|.\end{aligned}$$

後は文字を書き換えればよい． □

この公式はなかなか有効で，例えばこれにより  $\tan x$  の積分が計算できる．

例 2  $\int \tan x dx$  を求めよ．

解)

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = -\frac{\cos' x}{\cos x}$$

であるので，命題 1 を  $g(x) = \cos x$  として適用すれば，

$$\int \tan x dx = -\log |\cos x|. \tag{8}$$

□

後で用いる重要な公式を 2 つ紹介しておこう．

例 3

$$\int \frac{1}{x^2 + a^2} dx = \frac{1}{a} \operatorname{Arctan} \frac{x}{a}. \tag{9}$$

解) 両辺を微分しても良いが, ここでは「左辺の積分を計算する」という立場でやってみよう.  $f(x) = \frac{1}{x^2 + a^2}$ ,  $\varphi(t) = at$  とおくと,

$$\begin{aligned} (\text{左辺}) &= \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt \\ &= \int \frac{a}{a^2t^2 + a^2}dt \\ &= \frac{1}{a} \int \frac{dt}{t^2 + 1} \\ &= \frac{1}{a} \text{Arctant} \\ &= (\text{右辺}). \end{aligned}$$

□

例 4

$$\int \frac{x}{x^2 + a^2} dx = \frac{1}{2} \log(x^2 + a^2). \quad (10)$$

解) 先の例同様, 左辺の積分を計算する.  $f(x) = x^2 + a^2$  とおくと,

$$f'(x) = 2x.$$

よって

$$\begin{aligned} (\text{左辺}) &= \frac{1}{2} \int \frac{f'(x)}{f(x)} dx \\ &= \frac{1}{2} \log |f(x)| \quad (\because \text{命題 1}) \\ &= (\text{右辺}). \end{aligned}$$

□

## 2. 有理関数の積分

ここで扱うのは,  $P(x)$ ,  $Q(x)$  を多項式として

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx$$

の形の積分である. ここに現れた被積分関数  $\frac{P(x)}{Q(x)}$  を有理関数と呼ぶ. 答を先に言ってしまう.

答え: 有理関数の積分は必ず初等関数で書ける.

一般論で言うとややこしいので, 例でやってみよう.

例 5 次の積分を求めよ.

$$\int \frac{2x^4 - 3x^3 - x + 2}{(x^2 + 1)(x - 3)(x - 2)} dx$$

Step 1 :  $P(x)$  を  $Q(x)$  で割って

$$P(x) = S(x)Q(x) + R(x)$$

の形にする．ここで  $S(x)$  は  $P(x)$  を  $Q(x)$  で割った商， $R(x)$  はその余りである．これは

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = S(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}$$

と書くことと同値である．注意して欲しいことは， $R(x)$  は  $Q(x)$  で割った余りなので

$$R(x) \text{ の次数} < Q(x) \text{ の次数} \quad (*)$$

となっている点である．

今の場合に実際にやってみると，

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = 2 + \frac{7x^3 - 14x^2 + 9x + 10}{(x^2 + 1)(x - 3)(x - 2)}$$

となる．つまり

$$S(x) = 2, \quad R(x) = 7x^3 - 14x^2 + 9x + 10$$

である．

Step 2 :

$$\frac{R(x)}{Q(x)} = \frac{A}{x^2 + 1} + \frac{B}{x - 3} + \frac{C}{x - 2} \quad (11)$$

となる  $A, B, C$  を求める．

実際にやってみよう．上式の両辺に  $Q(x)$  を掛けると，

$$R(x) = A(x - 3)(x - 2) + B(x^2 + 1)(x - 2) + C(x^2 + 1)(x - 3). \quad (12)$$

$R(x) = 7x^3 - 14x^2 + 9x + 10$  だったことを思い出して，両辺に  $x = 3$  を代入すると，

$$80 = B(9 + 1)(3 - 2).$$

よって

$$B = 8.$$

また， $x = 2$  を代入して

$$8 = C(4 + 1)(2 - 3).$$

よって

$$C = -\frac{8}{5}.$$

この結果を (12) に代入して，

$$A = \frac{1}{5}(3x + 1)$$

を得る．ここで注意したいのは，

$$\frac{A}{x^2 + 1}, \quad \frac{B}{x - 3}, \quad \frac{C}{x - 2}$$

のいずれもが，

$$\text{分子の次数} < \text{分母の次数}$$

の形になっている点である．このような形に書けるということに，条件(\*)が効いている．すなわち，一般に(\*)が成り立っていれば，分母の $Q(x)$ を因数分解して， $\frac{R(x)}{Q(x)}$ を(11)の形に書いたとき，右辺に現れる式は必ず

$$\text{分子の次数} < \text{分母の次数}$$

を満たすように出来る<sup>1</sup>．

話をもとに戻そう．上の計算により，次のことがわかったことになる．

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = 2 + \left( \frac{3x}{5(x^2+1)} + \frac{1}{5(x^2+1)} \right) + \frac{8}{x-3} - \frac{8}{5(x-2)}. \quad (13)$$

Step 3 : (13)の両辺を積分しよう．

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx = \int 2dx + \frac{3}{5} \int \frac{xdx}{x^2+1} + \frac{1}{5} \int \frac{dx}{x^2+1} + 8 \int \frac{dx}{x-3} - \frac{8}{5} \int \frac{dx}{x-2}.$$

右辺の各項は，全てすでに知っている積分である．まず第1項は問題ないだろう．また第4，5項は適当な変数変換で $x^{-1}$ の積分に帰着できる．問題は第2，3項だが，これらは例3，例4で計算した積分の特別な場合である．公式(9)，(10)を使って具体的な計算を実行すると

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx = 2x + \frac{3}{10} \log(x^2+1) + \frac{1}{5} \text{Arctan}x + 8 \log|x-3| - \frac{8}{5} \log|x-2|$$

を得る．これが答である． □

一般の有理関数 $P(x)/Q(x)$ に対しても，同様の方法で積分の計算を実行できることがわかる(詳しくはAppendix A参照)．これを定理の形でまとめておこう．

定理6 有理関数の積分は必ず初等関数で書ける．

### 3. 三角関数の有理式の積分

$P(X, Y), Q(X, Y)$ を2変数の多項式として，

$$f(x) = \frac{P(\cos x, \sin x)}{Q(\cos x, \sin x)}$$

の積分を計算してみよう．

$\varphi(t) = 2\text{Arctan}t$ とし，

$$x = \varphi(t) \quad \left( \Leftrightarrow t = \tan \frac{x}{2} \right)$$

なる変数変換を考える．このとき

$$\varphi'(t) = \frac{2}{1+t^2}.$$

<sup>1</sup>「明らかではない」と思うかも知れないが，よく考えれば正しいことがわかる．興味のある者は自分で考えてみるといいだろう．

また,

$$\tan x = \frac{2 \tan \frac{x}{2}}{1 - \tan^2 \frac{x}{2}} = \frac{2t}{1 - t^2}, \quad \cos x = 2 \cos^2 \frac{x}{2} - 1 = \frac{2}{1 + \tan^2 \frac{x}{2}} - 1 = \frac{1 - t^2}{1 + t^2},$$

$$\sin x = \tan x \cos x = \frac{2t}{1 + t^2}.$$

よって,

$$\int f(x) dx = \int \frac{P(\cos x, \sin x)}{Q(\cos x, \sin x)} dx = \int \frac{P\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2}\right)}{Q\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2}\right)} \cdot \frac{2}{1+t^2} dt. \quad (14)$$

最右辺の被積分関数は  $t$  の有理関数. すなわち, このタイプの積分は, 変数変換

$$x = 2 \operatorname{Arctant}$$

によって有理関数の積分に帰着され, したがって必ず初等関数で書ける.

例 7  $\int \tan x dx$  を求めよ.

解) これはすでに計算した (例 2) が, ここでは上に述べた方法でもう一度計算してみよう.

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

であるので, (14) より

$$\int \tan x dx = \int \frac{2t}{1+t^2} \cdot \frac{1+t^2}{1-t^2} \cdot \frac{2}{1+t^2} dt = \int \frac{-4t}{(t^2+1)(t+1)(t-1)} dt.$$

最右辺の被積分関数に対して前節の step 2 を行って,

$$\frac{-4t}{(t^2+1)(t+1)(t-1)} = \frac{2t}{t^2+1} - \frac{1}{t+1} - \frac{1}{t-1}.$$

したがって,

$$\begin{aligned} \int \tan x dx &= \log(t^2+1) - \log|t+1| - \log|t-1| \\ &= -\log \left| \frac{t^2-1}{t^2+1} \right| \\ &= -\log |\cos x|. \end{aligned}$$

□

これはもちろん例 2 と同じ結果である. 比べればわかるように, 例 2 の方法で計算した方が圧倒的に楽である. 計算量が少なければ間違える可能性も減るし, その方がいいに決まっている.

つまり, 三角関数の有理式の積分の計算方法として『変数変換  $x = 2 \operatorname{Arctant}$  を用いる方法』は万能 (言い方を変えれば, 「この手続きさえ踏めば必ず計算できる」というもの) ではあるけれど, 個々のケースに応じてより良い (楽な) 計算方法がある場合もある. 公式だけをあてにせず, 臨機応変に対応していくことが肝心である.

例8  $\int \frac{1}{\cos^2 x} dx$  を求めよ .

解) これもバカ正直に (14) を使わない方が良い例 .  $\tan' x = \frac{1}{\cos^2 x}$  を用いれば , 一発で

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x$$

とわかる . □

例9  $\int \frac{1}{\cos x + \sin x} dx$  を求めよ .

解) これは (14) を使わないと計算できない (と思う) .

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{\cos x + \sin x} dx &= \int \frac{1}{\frac{1-t^2}{1+t^2} + \frac{2t}{1+t^2}} \cdot \frac{2}{1+t^2} dt \quad (\because (14)) \\ &= -2 \int \frac{dt}{t^2 - 2t - 1} \\ &= -2 \int \frac{dt}{(t-1-\sqrt{2})(t-1+\sqrt{2})} \\ &= -2 \int \frac{1}{2\sqrt{2}} \left( \frac{1}{t-(1+\sqrt{2})} - \frac{1}{t-(1-\sqrt{2})} \right) dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \log \left| \frac{t-(1-\sqrt{2})}{t-(1+\sqrt{2})} \right| \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \log \left| \frac{\tan \frac{x}{2} - (1-\sqrt{2})}{\tan \frac{x}{2} - (1+\sqrt{2})} \right|. \end{aligned}$$

□

#### 4. 2次無理関数の積分

$P(X, Y), Q(X, Y)$  を前節の通りとし , 次の積分を考える :

$$\int \frac{P(x, \sqrt{ax^2 + bx + c})}{Q(x, \sqrt{ax^2 + bx + c})} dx \quad (a \neq 0).$$

このタイプの積分も以下に述べる方法で , 有理関数の積分に帰着出来ることがわかる .

まず変数の1次変換によって ,  $ax^2 + bx + c$  の1次の項を消去する . このとき平方根は次のいずれかになる :

$$(i) \sqrt{k^2 - x^2}, \quad (ii) \sqrt{x^2 - k^2}, \quad (iii) \sqrt{x^2 + k^2}.$$

それぞれの場合に応じて ,

$$(i) x = k \sin \theta, \quad (ii) x = \frac{k}{\cos \theta}, \quad (iii) x = k \tan \theta$$

とおくと、平方根  $r$  および  $\frac{dx}{d\theta}$  はそれぞれ

$$(i) : r = k \cos \theta, \quad \frac{dx}{d\theta} = k \cos \theta,$$

$$(ii) : r = k \tan \theta, \quad \frac{dx}{d\theta} = k \frac{\sin \theta}{\cos^2 \theta},$$

$$(iii) : r = \frac{k}{\cos \theta}, \quad \frac{dx}{d\theta} = \frac{k}{\cos^2 \theta},$$

となる．よって求める積分は三角関数の有理式の積分に帰着される．前節の結果と併せれば、最終的に有理関数の積分に帰着されることになる．

例 10 次の積分を求めよ．

$$\int \sqrt{x^2 + a} dx \quad (a > 0).$$

解) 求める積分を  $I$  としよう． $a = k^2$  とすれば、これは上の (iii) の場合にあたる．すなわち

$$x = k \tan \theta$$

として、

$$I = \int \frac{k}{\cos \theta} \cdot \frac{k}{\cos^2 \theta} d\theta = a \int \frac{d\theta}{\cos^3 \theta}.$$

今度はこの積分を前節の方法で有理関数の積分に直す．

$$\theta = 2 \operatorname{Arctan} t \quad \left( \Leftrightarrow t = \tan \frac{\theta}{2} \right)$$

として、

$$\begin{aligned} a \int \frac{d\theta}{\cos^3 \theta} &= a \int \left( \frac{1+t^2}{1-t^2} \right)^3 \cdot \frac{2}{1+t^2} dt \\ &= 2a \int \frac{(1+t^2)^2}{(1-t^2)^3} dt. \end{aligned}$$

被積分関数の分母が

$$(1-t^2)^3 = (1+t)^3(1-t)^3$$

と因数分解できることに注意して、被積分関数を整理すると（これが前節 step 2 にあたる）

$$\frac{(1+t^2)^2}{(1-t^2)^3} = \frac{1}{2(t+1)^3} - \frac{1}{2(t-1)^3} - \frac{1}{4(t+1)^2} - \frac{1}{4(t-1)^2} + \frac{1}{4(t+1)} - \frac{1}{4(t-1)}.$$

したがって

$$\begin{aligned} I &= 2a \left( \frac{1}{2} \cdot \frac{-1}{2(t+1)^2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{-1}{2(t-1)^2} - \frac{1}{4} \cdot \frac{-1}{t+1} - \frac{1}{4} \cdot \frac{-1}{t-1} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{4} \cdot \log |t+1| - \frac{1}{4} \cdot \log |t-1| \right) \\ &= a \frac{t(t^2+1)}{(t^2-1)^2} + \frac{a}{2} \log \left| \frac{t+1}{t-1} \right|. \end{aligned}$$



あとはこれを  $x$  の関数の形に直せばよい．まず第 1 項を考えよう．

$$\begin{aligned}
 (\text{第 1 項}) &= \frac{a}{2} \cdot \left( \frac{1+t^2}{1-t^2} \right)^2 \cdot \frac{2t}{1+t^2} \\
 &= \frac{1}{2} \cdot k \tan \theta \cdot \frac{k}{\cos \theta} \\
 &= \frac{x\sqrt{x^2+a}}{2} \quad \left( \because \frac{k}{\cos \theta} = \sqrt{k^2 \tan^2 \theta + k^2} = \sqrt{x^2+a} \right).
 \end{aligned}$$

次に第 2 項．まず絶対値の中身だけ考えよう．

$$\begin{aligned}
 \frac{t+1}{t-1} &= \frac{\tan \frac{\theta}{2} + 1}{\tan \frac{\theta}{2} - 1} \\
 &= \frac{\sin \frac{\theta}{2} + \cos \frac{\theta}{2}}{\sin \frac{\theta}{2} - \cos \frac{\theta}{2}} \\
 &= \frac{(\sin \frac{\theta}{2} + \cos \frac{\theta}{2})^2}{\sin^2 \frac{\theta}{2} - \cos^2 \frac{\theta}{2}} \\
 &= \frac{2 \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} + 1}{-\cos \theta} \\
 &= -\frac{1 + \sin \theta}{\cos \theta} \\
 &= -\left( \frac{1}{\cos \theta} + \tan \theta \right).
 \end{aligned}$$

いま考えているのは不定積分の計算だから，適当な定数を足しても構わない．そこで第 2 項に新たに定数  $\frac{a}{2} \log k$  を足す．こうするときれいに  $x$  の関数で書ける．

$$\begin{aligned}
 \frac{a}{2} \log \left| \frac{t+1}{t-1} \right| + \frac{a}{2} \log k &= \frac{a}{2} \log \left| k \left( \frac{1}{\cos \theta} + \tan \theta \right) \right| \\
 &= \frac{a}{2} \log |\sqrt{x^2+a} + x|.
 \end{aligned}$$

$x$  の符号にかかわらず， $\sqrt{x^2+a} + x$  は常に正の値をとるので，以上併せて

$$\int \sqrt{x^2+a} dx = \frac{x\sqrt{x^2+a}}{2} + \frac{a}{2} \log(\sqrt{x^2+a} + x).$$

□

別解) 例 7 や 8 でも述べたように，積分の計算方法は 1 通りではなく，個々のケースに応じたより簡単な計算方法がある場合もある．今の場合，上の方法よりも

$$t = \sqrt{x^2+a} + x$$

と置いた方が，ずっと楽である．テキストの例 3.8 (p.104) に，この方法による計算が出ているので，詳しくはそちらを参照してもらいたい．

## 5. 初等関数で書けない積分

これまでの例は全て初等関数で書ける積分であったが、一般に初等関数の不定積分は初等関数で書くことは出来ない．というより、むしろ書けない場合の方が普通で、前節まではうまく書けるような特別な例だけを見ていたことになっている．典型的な例をいくつか紹介しておく．

$$\int \frac{\sin x}{x} dx, \quad \int e^{-x^2} dx, \quad \int \frac{1}{\sqrt{(3 \text{ 次以上の多項式})}} dx, \quad \text{etc.}$$

これらはいずれも非常に重要な積分で、このうちのいくつかは今学期の講義で登場することになるだろう．

## Appendix A. 定理 6 の補足

有理関数  $\frac{P(x)}{Q(x)}$  の積分について少し補足しておきたい．すでに述べたように計算の key が step 2 であるのは明らかだと思うが、ここでやっている計算は一言で言えば

$$\frac{P(x)}{Q(x)} \text{ を部分分数に展開せよ}$$

ということに他ならない．ここで、部分分数展開とは、分子の多項式  $Q(x)$  を因数分解して、もとの有理式  $\frac{P(x)}{Q(x)}$  を、 $Q(x)$  の各因子を分母とする有理式の和で書き直すことである．

したがって、まず最初のステップは

$$\text{『分母の多項式 } Q(x) \text{ を因数分解せよ』}$$

ということになる．これについては、次が知られている．

定理 1 1 実数係数の多項式は、必ず（実係数の）2 次以下の多項式の積に因数分解できる．

この定理は非自明であるが、ここでは証明せず認めて先に進むことにする<sup>2</sup>．

まず  $Q(x)$  の最高次の係数は 1 と仮定しても一般性を失わないことに注意しよう．このとき  $Q(x)$  が 2 次以下の多項式の積に因数分解出来るということを式で書けば次のようになる：

$$Q(x) = \left( \prod_{i=1}^k (x - a_i)^{m_i} \right) \left( \prod_{j=1}^l (x^2 + b_j x + c_j)^{n_j} \right). \quad (\#)$$

ただし、

$$\prod_{i=1}^k (x - a_i)^{m_i} = (x - a_1)^{m_1} \times (x - a_2)^{m_2} \times \cdots \times (x - a_k)^{m_k}$$

<sup>2</sup>証明には“体の理論”の知識が必要となる．本学では、これは数学科の 3 年時（6 学期）に学ぶことになっている内容で、おそらく数学科以外では学ぶことはないと思う．興味のあるものは「代数学」に関する教科書（図書館で探せばたくさんあるはず）の「ガロア理論」が出ている辺りを探してみるといいだろう．キーワードは「代数学の基本定理」と「 $\mathbb{C}$  は  $\mathbb{R}$  の 2 次拡大である」という事実である．

とする．つまり  $\prod$  は，総和の記号  $\sum$  の掛け算版である．したがって，上の  $Q(x)$  の次数  $N$  は

$$\begin{aligned} N &= m_1 + m_2 + \cdots + m_k + 2(n_1 + n_2 + \cdots + n_l) \\ &= \sum_{i=1}^k m_i + 2 \sum_{j=1}^l n_j \end{aligned}$$

とうことになる．

ここに現れた 2 次式

$$x^2 + b_j x + c_j$$

は，これ以上因数分解出来ない 2 次式だから

$$b_j^2 - 4c_j < 0$$

である<sup>3</sup>．ゆえに

$$x^2 + b_j x + c_j = \left(x + \frac{b_j}{2}\right)^2 + \frac{4c_j - b_j^2}{4}$$

と変形したとき，右辺の第 2 項は正である．

$$\alpha_j = -\frac{b_j}{2}, \quad \beta_j = \frac{\sqrt{4c_j - b_j^2}}{2}$$

とすれば，(♯) は

$$Q(x) = \left(\prod_{i=1}^k (x - a_i)^{m_i}\right) \left(\prod_{j=1}^l ((x - \alpha_j)^2 + \beta_j^2)^{n_j}\right) \quad (\#\#)$$

と書き直せる．

以上の記法の下に， $\frac{P(x)}{Q(x)}$  の部分分数展開は次のように与えられる．

命題 1 2

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \sum_{i=1}^k \sum_{p=1}^{m_i} \frac{c_{i,p}}{(x - a_i)^p} + \sum_{j=1}^l \sum_{q=1}^{n_j} \frac{\gamma_{j,q} x + \delta_{j,q}}{((x - \alpha_j)^2 + \beta_j^2)^q}.$$

ただし， $c_{i,p}, \gamma_{j,q}, \delta_{j,q}$  は全て実数である．

<sup>3</sup>もし  $D = b_j^2 - 4c_j \geq 0$  であれば，方程式  $x^2 + b_j x + c_j = 0$  は（重根の場合も込めて）2 つの実数解  $\lambda_1, \lambda_2$  をもつ．これは 2 次式  $x^2 + b_j x + c_j$  が

$$x^2 + b_j x + c_j = (x - \lambda_1)(x - \lambda_2)$$

と因数分解できることに他ならないから，矛盾．

証明は難しくないが、長くなるので省略する<sup>4</sup>。この命題から、有理関数の積分の計算は次の積分を計算することに帰着されることがわかる：

$$\int \frac{dx}{(x-a)^n}, \quad \int \frac{xdx}{(x^2+\beta^2)^n}, \quad \int \frac{xdx}{(x^2+\beta^2)^n}.$$

### 補題 1 3

$$(1) \quad \int \frac{dx}{(x-a)^n} = \begin{cases} \frac{-1}{n-1} \frac{1}{(x-a)^{n-1}} & (n > 1), \\ \log|x-a| & (n = 1). \end{cases}$$

$$(2) \quad \int \frac{xdx}{(x^2+\beta)^n} = \begin{cases} \frac{-1}{2(n-1)} \frac{1}{(x^2+\beta)^{n-1}} & (n > 1), \\ \log|x-a| & (n = 1). \end{cases}$$

(3)  $I_n = \int \frac{xdx}{(x^2+\beta)^n}$  とおくと、 $I_n$  は次の漸化式によって定まる：

$$I_n = \begin{cases} \frac{1}{\beta} \text{Arctan} \frac{x}{\beta} & (n = 1), \\ \frac{1}{\beta^2} \left( \frac{x}{(2n-2)(x^2+\beta^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2n-2} I_{n-1} \right) & (n > 1). \end{cases}$$

(証明) (1) はこのプリントの 1 ページの公式 (1) から簡単に示せる。(2) は  $x^2 = t$  と置けば (1) に帰着される。(3) の  $n = 1$  の場合はすでにやった。一般の場合は部分積分を使って示される。□

以上から、定理 6 のより精密なバージョンが得られる：

定理 6' 有理関数の不定積分は、有理関数と対数関数および逆正接関数で表される。

(コメント) これはほぼ 300 年前に、微積分学の創始者の一人と言われるライプニッツによって証明された結果である。ちなみに積分を表す記号  $\int$  は、ライプニッツが最初に使い始めたと言われている。

数学は非常に歴史の古い学問なので、みなさんの知っている結果は実はかなり前に証明されているものが多い。高校までで習う数学は、だいたい 17 世紀まで、大学 1 年の微積分でも、ようやく 18 世紀ぐらいである。

<sup>4</sup>証明を知りたい場合は、例えば、杉浦光夫「解析入門 I」(東京大学出版会)、命題 6.1 (p.241) を参照。