２０１０年度冬学期数学IB 中間試験問題

（２０１０年１１月１７日　１６：２０～１７：５０）

担当：斉藤　義久

（注意）敢えて問題は多めにしてあるが，単位を取得するだけなら必ずしも全ての問題を解く必要は無い．自信の無い者は，解けそうな問題から手を付けることを勧める．

[1] 次の関数の原始関数を求めよ．

(1) $\dfrac{1}{x^3-x}$　　(2) $\dfrac{1}{x^4+1}$　　(3) $\dfrac{1}{\sin x}$

[2] $a>0$ を定数とし，極方程式

$$r = a\theta \qquad (0 \leq \theta \leq \alpha)$$

で定義される曲線の長さを求めよ．

[3] n 次多項式 $P_n(x)$ を次のように定める．

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n \qquad (n=0,1,2,\cdots).$$

(1) $0 \leq k < l$ のとき，$\dfrac{d^k}{dx^k}(x^2-1)^l$ は $(x^2-1)^{l-k}$ で割り切れることを示せ．

(2) $m \neq n$ のとき，$\displaystyle\int_{-1}^{1} P_m(x)P_n(x)dx = 0$ を示せ．

(3) $\displaystyle\int_{-1}^{1} P_n(x)^2 dx$ を求めよ．

[4] 次の級数が収束するかどうか判定せよ．

(1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{k(k+1)}}$　　(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{k(k+1)(k+2)}}$　　(3) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(k!)^2}{(2k)!}$

[5] (1) ベキ級数 $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} k^2 x^k$ の収束半径を求めよ．

(2) このベキ級数が収束半径内で定める関数の形を求めよ．
（できるだけ簡単な形で書くこと.）

[6] 級数 $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{3k+1}$ の値を求めよ．