２０１０年度数学IB冬学期期末試験問題

２月１４日：１０：５５～１２：２５ (９０分)

担当：斉藤　義久

[1] 次の関数の原始関数を求めよ．

(1) $\dfrac{3x}{x^2-x-2}$　　(2) $\mathrm{Arcsin}\ x$　　(3) $\dfrac{1}{\cos x+\sin x}$

[2] 次の広義積分の収束・発散を判定せよ．また収束する場合には，その値を求めよ．

(1) $\displaystyle\int_{-1}^{1}\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}dx$　　(2) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}dx\ (\alpha>0)$　　(3) $\displaystyle\int_0^{\pi/2}\log\sin x dx$

[3] D と $f(x,y)$ を以下のように与える時，重積分 $\displaystyle\int\int_D f(x,y)dxdy$ の値を計算せよ．

(1) $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 1\le x\le 2,\ 2\le y\le 3\},\quad f(x,y)=\dfrac{1}{x+y}.$

(2) $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid \sqrt{x}+\sqrt{y}\le 1,\ x\ge 0,\ y\ge 0\},\quad f(x,y)=xy.$

[4] ３次元空間の極座標変換

$$x=r\sin\theta\cos\phi,\quad y=r\sin\theta\cos\phi,\quad z=r\cos\theta$$

を考える．

(1) 変換のヤコビ行列式を求めよ．

(2) 問 (1) の結果を用いて，半径１の球の体積が $4\pi/3$ であることを示せ．

注）(1) の結果を用いずに (2) のみ解答している場合は,「解答の条件を満たしていない」と判断する．

[5] p,q を正の実数とするとき，次の等式を証明せよ．

$$B(p,q)=\frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}.$$

ただし，

$$\Gamma(s)=\int_0^\infty e^{-x}x^{s-1}dx\ (s>0),\qquad B(p,q)=\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx$$

である．

注）広義積分 $\Gamma(s)$ および $B(p,q)$ が収束することは，証明せずに用いてよい．

[6] 「グリーンの定理」の主張を正確に述べよ．

（答案作成上の注意）

- 講義中にやったかどうかに関わらず，知っている知識は何でも使って解いて良い．ただし，講義中にやらなかった定理・性質等を用いる場合には「どんな定理を使ったのか」を明記すること．
- 「答のみ」との指定がない場合は記述式の問題であるので，そのつもりで答案を作成すること．
- 判読不能の文字，文章として日本語の体裁をなしていない答案は，仮に好意的に解釈すれば正解と言えなくもない場合でも０点にする場合があるので，注意すること．特に，計算を書きなぐっただけの解答は単なるメモ書きと解釈し，答案とは認めない．

金井さんへのコメント：

[1] の (1), (2), [2] の (1), (3) は金井さんの作った演習問題から，[1] の (3) と [3] は僕のプリント（その２）から出しました。[2] の (2) は問題には出していないけれど、講義中に解説した例です。

[1]〜[4] までの小問は全て１０点とすると，全部出来れば１００点になります。[5] と [6] は，おそらく出来る人はあまりいないと思うので、ちゃんと勉強した人向けのサービスのつもりで，トータルで１３０点満点でつける予定です（もしかすると [6] なんかは結構出来ちゃうかも知れませんが‥）。

[1] の (3) と [2] の (3) はちょっと難しいかもしれないけれど、それ以外の部分で８０点取れるので、多少計算間違いで減点があったとしても、復習をきちんとしていれば５０点は取れるのでは？と思っていますが、甘いですかね？

間違い、あるいはご意見（計算量が多すぎるなど）がありましたら、来週の火曜日までに頂ければ幸いです。

僕よりも、演習で学生さんの出来具合を見ている金井さんの方が的確な判断が下せるかと思いますので。

よろしくお願いします。

さいとう　よしひさ