1998 年度理科 II, III 類 1 年生 数学 IA 演習・小テスト (3) 解説

1998 年 5 月 12 日・河東泰之
数理科学研究科棟 310 号室 (電話 5465-7024)
e-mail yasuyuki@ms.u-tokyo.ac.jp
homepage http://kyokan.ms.u-tokyo.ac.jp/~yasuyuki

配点は [1] から順に 40, 30, 30 点です．[1] は一番簡単なんですが，点数を上げるために配点を多くしました．[1] は授業でやった通りの基本問題です．これができなかった人はよく復習してください．($n \geq 2$ と書いておくべきでした．) [2] は $\sqrt{2}$ に収束するわけで,「$\sqrt{2}$ に収束する事を示せ」と言う問題なら高校生でもできるでしょうが，ここでは平方根などを使わないで，有理数の性質だけで，Cauchy 列である事を示せ，と言う問題です．[3] は，下の解答例のように，有理数の範囲内でやってほしかったんですが，これは少し問題のポイントが [1], [2] とは違うので，$\alpha_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ や，$\alpha_n = \log n$ と言ったものでも (ちゃんと書いてあれば) 減点はしていません．
平均は 49.9 点，最高は 100 点 (2 人) でした．下に略解をつけます．

[1] 任意の $\varepsilon > 0$ に対し，$0 < r < \varepsilon$ となる有理数 $r$ を取る．$N^2 > 1 + 3/r$ となる自然数 $N$ を取れば，$n > N$ のときに，

$$\left| \frac{n^2+2}{n^2-1} - 1 \right| = \left| \frac{3}{n^2-1} \right| < r < \varepsilon$$

となるので，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{n^2+2}{n^2-1} = 1$ が証明された．

[2] まず，$\alpha_n$ はすべて正の有理数である事が (数学的帰納法で) わかる．次に $\alpha_{n+1}^2 - 2 = \left( \dfrac{\alpha_n}{2} - \dfrac{1}{\alpha_n} \right)^2 \geq 0$ なので，$\alpha_{n+1}^2 \geq 2$ である．(等号は実際は成立しないが今はそれは問題ではない．) また，

$$\alpha_{n+1} - \alpha_n = \frac{1}{\alpha_n} - \frac{\alpha_n}{2} = \frac{2 - \alpha_n^2}{2\alpha_n} \leq 0$$

でもある．(ここで「下に有界な単調減少数列は収束するから Cauchy 列だ」としたいところだが，それはまだ証明していないので，別の工夫をする．) まず有理数 $t$ が，$t^2 \geq 2$ を満たす時，$\dfrac{t^2-2}{4t} \geq \dfrac{\dfrac{t^2}{4} + \dfrac{1}{t^2} - 1}{t + \dfrac{2}{t}}$ である事に注意する．(分母をはらえば簡単にわかる．) これより，

$$\alpha_n - \alpha_{n+1} = \frac{\alpha_n^2 - 2}{2\alpha_n} = \frac{-2 + \left( \dfrac{\alpha_{n-1}}{2} + \dfrac{1}{\alpha_{n-1}} \right)^2}{2\left( \dfrac{\alpha_{n-1}}{2} + \dfrac{1}{\alpha_{n-1}} \right)} \leq \frac{1}{2} \frac{\alpha_{n-1}^2 - 2}{2\alpha_{n-1}}$$

であるから，$\alpha_2 = \dfrac{3}{2}, \alpha_3 = \dfrac{17}{12}$ を用いて，$n \geq 2$ のとき

$$0 \leq \alpha_n - a_{n+1} \leq \frac{1}{2^{n-2}}(\alpha_2 - \alpha_3) = \frac{1}{3 \cdot 2^n}$$

を得る．これより，$N < n \le m$ のとき，

$$0 \le \alpha_n - \alpha_m \le \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2^n} + \cdots + \frac{1}{2^{m-1}}\right) < \frac{1}{3 \cdot 2^{n-1}} \le \frac{1}{3 \cdot 2^N}$$

なので，任意に $\varepsilon > 0$ が与えられたときに，これが $\varepsilon$ より小さくなるように，自然数 $N$ を選ぶ事ができる．つまり，$\{\alpha_n\}_n$ は Cauchy 列である．

[3] たとえば一つの例は次のとおり．
$n = 1, 2, 3, \ldots$ に対して，$1/2^n$ を $2^n$ 回並べてできる数列

$$1/2, 1/2, 1/4, 1/4, 1/4, 1/4, 1/8, \ldots$$

を $\{\beta_n\}_n$ とする．$\alpha_n = \sum_{k=1}^{n} \beta_k$ と定めるとこれが，以下のように条件を満たす．
任意の $\varepsilon > 0$ に対し，$0 < r < \varepsilon$ となる有理数 $r$ を取る．$r < 2^k$ となる自然数 $k$ を取り，$\beta_N = 1/2^k$ となる自然数 $N$ を取る．$n > N$ であれば，

$$|\alpha_n - \alpha_{n+1}| = |\beta_{n+1}| \le 1/2^k < r < \varepsilon$$

だから，問題の条件は確かに満たされている．
一方，数列 $\{\alpha_n\}_n$ は単調増大で，$n = 2 + 4 + \cdots + 2^k$ に対し，$\alpha_n = k$ だから，$\{\alpha_n\}_n$ は Cauchy 列ではない．