共形場理論と作用素環，頂点作用素代数

河東泰之 (かわひがしやすゆき)
東京大学大学院数理科学研究科
e-mail: yasuyuki@ms.u-tokyo.ac.jp

2005 年 3 月 30 日

1 前置き

場の量子論はもちろん物理学の理論である．そこに現れる数学的構造が数学の立場からも大変興味深いものであるため，多くの数学者がそれに興味を持っている．ここで取り上げるのは，共形場理論と呼ばれる，特に高い対称性を持つ場合の理論である．この理論を，無限次元代数系を用いて数学的に研究しようとする流儀が二つある．一つは，作用素環の族を用いる，代数的場の量子論と呼ばれるもの，もう一つは頂点作用素代数の理論である．この二つの理論の関係，相互に与えた影響について説明することがこの講演の目的である．一般に「量子何とか」と呼ばれる数学に興味はあるが，これら二つの理論についてはどちらもよく知らない，という人を主なターゲットにして話をしたい．ここでは，物理的なことはあまり表に出さず，代数系とその表現という見方を中心に説明していく．なおこの二つは，日本数学会の分科会で分けるとそれぞれ函数解析学と代数学に属しており，一見まったく別の分野のようだが，もともと同じ対象を数学的に公理付けする際に違う流儀を取っているというだけのことで，とてもよく似たものであることを強調しておきたい．(これは当然のことであり，似ていなかったら，少なくともどちらかの考え方が誤っているのである．)，

これら二つの理論の説明に入る前に，両者の背後にある伝統的な場の量子論の Wightman による数学的な公理化について簡単に説明しておこう．これは古くからあって，たとえば [31] に出ている標準的なものであるが，ここでは正確な形は述べず，あとの考え方に必要なことだけを述べる．基本的な数学的対象は，Minkowski 空間上の作用素値超関数の族である．ここで作用素値超関数とは，試験関数にほどこすと，(一般に非有界な) 作用素を与えるもので，これらの作用素は「真空ベクトル」と呼ばれる特別なベクトルを持つ共通の Hilbert 空間に作用している．また，この Hilbert 空間上には「時空の対称性を表す群」のユニタリ表現が存在して，しかるべき「共変性の公理」を満たす．今考えている時空は Minkowski 空間なので,「時空の対称性を表す群」として自然なものは制限 Poincaré 群の普遍被覆であるが，あとではもっと大きな群，すなわち高い対称性を考える．この表現に関する，スペクトル条件も重要な公理であるが，概念的な理解にはそれほど重要ではないのでここでは省略する．また相対論的因果律によって，互いに空間的な二つの時空領域の間には影響は及ばないので，このことを表す局所性の公理が大変重要である．この公理についてはあとで，作用素環のネットの場合と，頂点作用素代数の場合について説明する．

上のような意味での場の量子論を考える時，もっとも自然な「時空」は4次元 Minkowski 空間であろう．しかし，この場合の理論については多くの困難があり，自明でない例が作れない．近年盛んに考えられているのは，もっと低い次元の空間で高い対称性を考えると，おもしろい例がたくさん作れて見事な数学理論が展開できる，ということである．ここでもそのような場合，つまり共形場理論と呼ばれるものについて説明しよう．(物理的側面も含めた，共形場理論一般の大部なテキストとして [6] をあげておく．)

空間次元1次元に時間の1次元を加えた，2次元 Minkowski 空間をまず考える．ここで「時空の対称性」として共形変換，すなわち各点ごとに異なるスケールで拡大・縮小するような変換も許して考える．空間変数を $x,$ 時間変数を t としたときに，新たな変数 $t+x, t-x$ を考えれば，この新しい変数について研究の対象となる代数系を二つに分解することができる．このようにして得られる片方の理論を chiral な共形場理論と呼ぶ．これを数学的にどのように取り扱うかが以下のテーマである．新しい一つの変数 $t\pm x$ は1次元空間を動くが，これに無限遠点を加えて compact 化した1次元円周 S^1 が，chiral な共形場理論の「時空」にあたる空間である．無限遠点を動かすような変換，たとえば S^1 上の回転も変換の中に入れておきたいのでこのような compact 化が行われる．また，$t\pm x$ が変数なので，時間変数と空間変数は混ざっているが，かまわずにこの S^1 を時空にあたるものとして考察を進めればよい．すなわち，上の Minkowski 空間の変わりに，S^1 を出発点に取り，この上の作用素値超関数の族を考え，また空間の対称性を表す群としては，S^1 の上の向きを保つ微分同相写像全体 $\mathrm{Diff}(S^1)$ を考えるのである．

2　代数的場の量子論と作用素環のネット

さて，上のような作用素値超関数の族の代わりに，作用素環の族を考えようというのが，代数的場の量子論である．ここでいう作用素値超関数は試験関数に作用させたあとでも一般に非有界なので，作用素の定義域の問題の扱いが常に面倒である．その代わりに，有界線形作用素のなす環を考えて，作用素環の一般論を使った方が理論的な扱いがしやすい，ということがポイントである．そこでこの理論における対象は，ある公理系を満たすような，作用素環の族ということになる．この公理系をどうやって選ぶかということの背景に，上のセクションで述べたような作用素値超関数の族があってそれをこれから説明するわけだが，純粋に数学的な立場からはそういうことは忘れて，単にある公理を満たす代数系の研究だと思うことも可能である．この考え方は古くからあり，荒木，Haag, Kastler らによって，Minkowski 空間上で研究されてきた．標準的教科書は [14] である．ここでは，この考え方を S^1 上で共形対称性を要請した場合について説明する．

まず上のような S^1 上の作用素値超関数の族があったとする．S^1 の，連結開集合であって，空でもなく，稠密でもないものを区間と呼ぶ．S^1 全体やそこから1点を除いたものは区間ではないことに注意する．区間 I を一つ決める．超関数を，台が I に含まれるような試験関数にほどこして得られる (非有界) 作用素たちを考え，その関数として得られる有界作用素たちを考える．(たとえば最初から自己共役なものだけを考えてもよい．) それらによって生成される作用素環 $A(I)$ を考えれば，各区間 I ごとに，共通の Hilbert 空間の上の作用素環が定まることになり，これによって I で parameterize された作用素環 $A(I)$ の族ができる．この $A(I)$ に期待される性質を公理化したものが，S^1 上の作用素環の共形ネットであり，以下ここでは単に作用素環のネットと呼ぶ．(もともと Minkowski 空間上で考えていた時にこの族は包含関係について有向族をなしていたのでネットという名前がついた．今，上の意味での区間たちは包含関係について有向集合ではないので，

ネットという名前は本来不適切だがよく使われている．）正確な公理は [17] にゆずるが，たとえば $I \subset J$ であれば，$A(I) \subset A(J)$ が自然に要請される．また，局所性の公理はこの設定では，I と J が交わらない時，$A(I)$ の元と $A(J)$ の元は可換である，という形を取る．また，$\mathrm{Diff}(S^1)$ の作用の共変性についてはこの群が今考えている Hilbert 空間上に射影的ユニタリ表現 u を持ち，$u_g A(I) u_g^* = A(gI)$ を満たす，ということが公理となる．ここで gI は，区間 I の，微分同相写像 g による像である．このときこの Hilbert 空間は，$\mathrm{Diff}(S^1)$ に対応する無限次元 Lie 環である Virasoro algebra の表現空間となり，これによって central charge c と呼ばれる正の実数値を取る不変量が定義される．

なお，$\mathrm{Diff}(S^1)$ の代わりにその部分群である Möbius 変換たちだけを考えて，それを S^1 上の作用素環の共形ネットということもある．その際も大体の枠組みは同じだが，この場合には central charge は定義できない．以下の頂点作用素代数との類似を見るには $\mathrm{Diff}(S^1)$ を考える必要がある．ただし，$\mathrm{Diff}(S^1)$ を考えることと，Möbius 群を考えることの間に本当にどのくらいの違いがあるのかはよくわかっていない．たとえばある種のたちのよい状況下では，Möbius 変換がはたらいているという仮定から自動的に作用が $\mathrm{Diff}(S^1)$ に延びるのではないかと期待されている．

3 頂点作用素代数

私は別に頂点作用素代数の専門家ではまったくない．割と最近まで，頂点作用素代数の英語名 vertex operator algebra は，作用素環 (operator algebra) とあまり関係がないくせに似たような名前で困ったものだと思っていたくらいである．しかし最近，S^1 上の作用素環のネットと頂点作用素代数は本来同じものだということが理解できてきたのでその立場から説明してみたい．(これらが本来同じものだというのは，別に深い洞察でもなんでもなく，まったく当たり前のことである．しかし明確に自覚している人はかなり少ないように感じられる．) 以下で述べるのは，S^1 上の作用素値超関数のしかるべき族にあたるものをどうやって代数的に公理化するかということの大雑把な説明である．公理の正確な形を述べることが目的ではないので，それについてはたとえば [12] などの文献を参照していただきたい．

S^1 上で作用素値超関数 v があったとすると，それを Fourier 級数展開することにより，$v(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} v_n z^{-n-1}$ と書けるであろう．ここで，各 v_n は作用素である．また，z は絶対値 1 の複素数を表す変数であるが，その指数が n ではなく $-n-1$ になっているのは単に取り決めの問題である．さて，これらは $\mathbf{1}$ と書かれる真空ベクトルを持つ Hilbert 空間にはたらくはずだが，完備性とか正定値内積とかは忘れて，単に $\mathbf{C}$-係数の無限次元ベクトル空間ということにしよう．そして，$v(z)$ を動かして，定数項である v_{-1} を $\mathbf{1}$ にほどこしたとき，$v(z)$ たちから $v_{-1}\mathbf{1}$ への写像を考えるとこれが全単射であることが期待されるので，これを実際上公理として要請することにする．(作用素環の方を知っている人のために書くと作用素値超関数たちについて，真空ベクトルが cyclic separating である，というような条件である．また，代数的場の量子論の Reeh-Schlieder の定理とも大体同じ内容のことである．完備化はしないので，真空ベクトルにほどこすことが，「稠密な部分空間への写像」ではなく「全射」になる．) つまりまとめると，まず無限次元 $\mathbf{C}$-係数ベクトル空間 V があり，V の各元 v について，形式的べき級数 $v(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} v_n z^{-n-1}$ が定まり，各係数 v_n は V の自己準同型を与える，というのが公理系の基本的設定である．この $v(z)$ が「頂点作用素」である．各 v_n は $w \in V$ にはたらいて $v_n w \in V$ が定まるが，見方を変えると各 $n \in \mathbf{Z}$ ごとに，V 上の 2 項演算 $(v, w) \in V \times V \mapsto v_n w \in V$ があると思うことが

できる．すべての公理はこの 2 項演算に関する条件として書けるので，抽象的にはそのような「可算個の積演算」を持つ代数系が頂点作用素代数だとも思うことができる．ただしこの可算個の積演算は結合的でも可換でもなく，とても複雑な条件を満たしているのでいきなりその公理を見ても何のことだかわからないであろう．$v(z)$ の満たすべき公理系の説明を続けよう．V の中に真空ベクトルと呼ばれる特別のベクトル $\mathbf{1}$ があり，それが上で述べたこと (を正確に公理化した条件) を満たしているのである．また，$\mathrm{Diff}(S^1)$ に関する共変性は Virasoro 元と呼ばれる V の特別な元 ω に関する条件として公理化される．この ω に対応する形式的べき級数の係数たちが，Virasoro 代数の関係式を満たすというのが公理である．ここに自然に central charge c が現れる．さらに局所性の公理について説明しよう．V の元 v, w に対する形式的べき級数 $v(z), w(z)$ は本来作用素値超関数だったはずなので，そう思うと局所性条件というのは $z \neq z'$ のとき $v(z)w(z') = w(z')v(z)$ と書けるはずである．$v(z), w(z)$ は超関数なのでこのことは，$z = z'$ でも $v(z)w(z') = w(z')v(z)$ ということを意味しない．この状況の参考になる簡単な例として，通常の $\mathbf{R}$ 上の超関数 $T(x)$ を考えてみよう．T の台が原点 1 点に含まれていたとしてもそれは，T が超関数として 0 であることは意味しない．わかることは，T は，δ-関数の有限階微分の 1 次結合だ，ということである．したがってこの時十分大きい n を取れば，$x^n T = 0$ となっている．これに基づき，十分大きい n に対して $(z - z')^n (v(z)w(z') - w(z')v(z)) = 0$ (を形式的べき級数の等式としてしかるべく解釈したもの) を局所性の公理として採用するのである．細かい点を除けば大体以上が，頂点作用素代数 V の公理である．

4 二つの公理系の間の関係

上の二つはいずれも数学的に公理付けられた代数系なので，片方の公理を満たすものがあれば，もう片方の公理を満たすものが，canonical に作れる，というようなことが証明できれば話は簡明である．また，最初にふれた，Wightman による作用素値超関数を用いた方法も，数学的に厳密な公理系なので，これも含めて三つの間の関係を考えてもよい．しかし残念ながらそのような結果は知られていない．作用素環のネットと，Wightman の公理系との関係は（一般の Minkowski 空間上で）昔から研究されており，どちらの公理系も「同等」と考えられているが決定的な結果は出ていない．また，頂点作用素代数から出発する場合は，正定値内積がうまく入らない例が知られているので，その場合に Hilbert 空間が作れないことは明らかである．さらに，正定値内積があると仮定しても，頂点作用素代数の公理は純代数的で収束のことはまったく公理に入っていないので，そこから出発して作用素環のネットを作るのは無理ではないかと思われる．逆に，作用素環のネットから出発して頂点作用素代数を作る方向の方が見込みがあるように思われるが，まだそのようなことは証明されていない．非常におおざっぱなレベルでは，頂点作用素代数と作用素環のネットとの関係は，Lie 環と Lie 群の関係のようなものではないかと思われるのだが．

このように公理のレベルではきっちりした対応は今のところないのだが，具体例やさまざまな構成法を見れば，両者の間に密接な類似があることはまったく明らかである．すなわち，一つの作用素環のネット，あるいは一つの頂点作用素代数を作る基本的な方法は二つあり，Kac-Moody (あるいは Virasoro) 代数から出発するか，ある種の格子から出発するかである．また，作用素環のネット，あるいは頂点作用素代数が与えられた時にそれを元にして新しい作用素環のネット，あるいは頂点作用素代数を作る方法としては，テンソル積 (これは簡単)，simple current extension, orbifold construction, coset construction などがある．あとの 3 つの名前は頂点作用素代数の用語で，作用素環の言葉で言えばこれ

らはそれぞれ，(有限アーベル群による) 接合積，(有限群による) 不動点環，相対可換子環である．(なお，作用素環の方の subfactor 理論でも類似の構成が考えられており，私も昔 orbifold subfactor というのをやっていた．Subfactor 理論では，接合積を考えることも不動点環を考えることもほぼ対称であり，接合積の方に orbifold という名前を使うことがよくあったが，作用素環のネットについては，接合積を考えることと不動点環を考えることはまったく対称ではない．Orbifold と呼ばれるのは，不動点環の方である．) これらの構成についてはいずれも頂点作用素代数の方が先行し，それの類似を追及することによって，作用素環のネットの構成が A. Wassermann, F. Xu らによって行われた．

このように両者が似ていることは明らかなのだが，多くの研究は互いに独立の興味に基づき別々に行われてきた．したがってそれぞれ別の方向に発展してきた話題もたくさんあり，それらをながめると，片方の方がうまく話が進んでいる話題がいくつかある．以下それらについて説明していこう．その目的には片方でできていることをもう片方に「翻訳」してみたい，というのが一つある．それだけでは何も面白くない，という意見も当然あるだろうが，片方でできていることや物の見方をもう片方で考えてみれば新しい発見がある，ということも期待できるし，どちらでもまだできていないことを目指すのだとしても，これまでにわかっていることを理解しておくことは重要であるだろう．

5　作用素環の方が進んでいること

まず，私は作用素環論の研究者であるため，作用素環のネットの方が研究が進んでいると思われる点から説明する．それは表現論である．作用素環のネットでは，考えている作用素環たちはもともと共通の Hilbert 空間に作用しているのだが，単に環の族だと思えば別の (Hilbert) 空間への作用を考えることはもちろんできる．(ただし，この新しい Hilbert 空間の方にはもはや，真空ベクトルにあたるものはない．) このような表現論については古くから Doplicher-Haag-Roberts の有名な理論 [9] が成立しており，それを今の S^1 上のネットの話に翻訳することは難しくない．Doplicher-Haag-Roberts 理論のポイントは，環の族の表現を考える代わりに，一つの大きな環のしかるべき自己準同型を考えればよい，というものである．この「大きな環」は気分としては，今考えている族の作用素環たちによって生成される環なのだが，正確な定義にはもっと注意が必要である．この見方の利点は，自己準同型は容易に合成できる，ということである．この演算が「表現のテンソル積」に当たるものを与えるのである．ここで，群や Hopf 代数の表現のテンソル積は容易に定義できるが，環や環の族のテンソル積は直ちには定義できないことに注意しておく．このように自己準同型を経由することによって，表現のテンソル積がうまく定義され，期待される性質が満たされるのである．これによって，表現たちのなす圏ががテンソル圏になり，さらに，今考えている S^1 上のネットの場合は，braided なテンソル圏になるのである．(たとえば [11] を参照．)

Jones の subfactor 理論 [16] では，[10] に解説したように二つの作用素環 $N \subset M$ の組の表現論を考えることが重要であった．ここでは，作用素環の族の表現論を考えるのである．二個の作用素環の表現論と，作用素環の連続濃度の族の表現論ではだいぶ話が違いそうだが，実は驚くほど多くの共通点がある．このことは，Longo [24] に始まり，そもそもこれが，もともと subfactor 理論を研究していた私が現在作用素環のネットを研究している理由である．S^1 上の作用素環のネットは，subfactor $N \subset M$ の「連続版」のようなもので，前者の後者に対する関係は，1 径数自己同型群の自己同型に対する関係のようなものである．

一方，頂点作用素代数はとにかく代数系なので，モジュールにあたる概念を定義することは簡単である．そのテンソル積に当たるものも intertwining operator と呼ばれるものによって定義されている．ただ，代数的な扱いなので，よりたちのよい module を考えるには admissible だとか regular だとかさまざまな条件を追加する必要がある．しかしとにかく，ここまでなら作用素環のネットの表現論と頂点作用素代数のモジュールの話はほぼ平行だと言える．違いはこのあとであり，それは有理性の理論と，誘導表現の理論である．

作用素環のネットにおいても，頂点作用素代数においても既約な表現・モジュール (の同値類) が有限個しかない時が興味深い．このような作用素環のネットや，頂点作用素代数は有理的であると言う．このとき表現論は有限群のようなものになっているわけである．このような有限個の既約な対象を持つ圏は，1 のべき根における量子群やそこから生じる 3 次元トポロジーの量子不変量においても重要である．(作用素環の立場からの，量子不変量の扱いについては [10], [22] やそこでの引用文献を見ていただきたい．)

[21] において我々は，完全有理性と呼ばれる，有理性より強い条件を導入し，その特徴づけを与えた．その後 [27] によって，弱い一般的な仮定の下では，この条件は有理性と同値であることが証明された．完全有理性は，テンソル積，simple current extension, orbifold construction, (cofinite 条件を満たす) coset construction などで保たれることが容易にわかるので，作用素環のネットの有理性の判定がかなり容易にできるわけである．また完全有理性がなりたつときは，表現のなす圏が，modular であることも [21] で証明されている．頂点作用素代数については有理性が，orbifold construction で保たれるかどうかは有名な未解決問題である．

次に誘導表現の理論に移ろう．群と部分群があるときに，小さい方の群の表現から，大きい方の群の表現を作るのが誘導表現である．これと同様に，作用素環のネット $A(I)$ が，別の作用素環のネット $B(I)$ に対して，$A(I) \subset B(I)$ のようになっているときに，前者の表現から後者の表現を作りたいのである．この方法は作用素環のネットでは，α-induction と呼ばれており，最初 [26] によって導入され，基本的な性質や例が [32] によって研究され，さらに詳しい性質が，[1], [2], [3] によって調べられた．正確に言うと，上のような状況で一般に $A(I)$ の表現から作れるものは，$B(I)$ の表現ではなく，表現もどきにすぎないのであるが，どのくらい本当の表現から離れているか，またいつ，本当の表現になるかなどが詳しくわかっている．特に [3] では，modular invariant (と呼ばれる行列）との関係が明らかになった．頂点作用素代数についても，induced module の理論や，また，twisted module と呼ばれるものの理論があるが，作用素環のネットの立場からはいずれも，α-induction の特別な場合にあたると考えられる．

この α-induction の理論を使うことによって，一つの作用素環のネット $A(I)$ が与えられた時に，その延長ネット $B(I) \supset A(I)$ をすべて分類する，いう問題が研究できる．$A(I)$ が完全有理的である場合にはこの延長問題の解は有限個しかないことが一般的に証明でき，少なくとも原理的には全部分類できるものであることが示される．このことの応用として，$c < 1$ を満たす作用素環のネットは [17] で完全に分類された．これは容易にわかる無限系列のほかに 4 つの例外型のネットを含んでいる．このうち 3 つは coset と解釈できるが，残りの一つは新しいタイプのものである．また，この応用として，2 次元 Minkowski 空間上のネットの分類も [18] で得られている．

上で出てきた拡張問題を頂点作用素代数に翻訳すると次の問題になる．

「頂点作用素代数 V に対し，その有限個の既約モジュール V_j と有限の mulitplicity n_j を使って，$W = \bigoplus n_j V_j$ を作る．ただし，V 自身はモジュール V_0 とみなし，これについては $n_0 = 1$ とする．このとき，V_0 の Virasoro 元を使って W に頂点作用素代数の構

造を入れよ.」

これが [25], [26] で考えられた作用素環のネットの拡張問題のフォーミュレーションととカテゴリー的に同じ問題であることは Kirillov-Ostrik [23] によって指摘された．したがって，上で説明した [17] の結果は直ちに頂点作用素代数の結果に翻訳することができ，上の拡張問題で V が $c<1$ の Virasoro 頂点作用素代数である場合は，完全に解けたことになる．この問題の部分的な場合はこれまで，頂点作用素代数の方でも研究されてきたものである．

なお，ここまで作用素環のネットの表現論の方が進んでいるという話をしてきたが，頂点作用素代数と比べた場合，実は一つ欠けているものがある．それは，Zhu 代数 [33] の対応物である．頂点作用素代数のテンソル積 (fusion) の計算は，Zhu 代数と呼ばれるものの計算に帰着され，多くの具体的な計算がこれによって行われてきている．この Zhu 代数は典型的なケースでは，有限次元の半単純代数なので，無限次元の代数系よりずっと扱いやすいものである．これに対応するものを作用素環のネットに対して作ることが重要なテーマであろう．

6　頂点作用素代数の方が進んでいること

頂点作用素代数の方がずっと歴史は新しいのだが，作用素環のネットよりも先に話がうまく行っている話題はいくつかある．ここでは 3 つほど取り上げよう．

まず，一つ目は character のモジュラー変換の理論 [33] である．頂点作用素 V は (説明しなかった) 公理によって，$\bigoplus_{n=0}^{\infty} V_n$ という grading を持つので，$q=\exp(2\pi i\tau)$ の形式的べき級数 $\sum_{n=0}^{\infty}\dim V_n q^{n-c/24}$ を考えることができる．(c は central charge である．各 $\dim V_n$ が有限であることは公理として要請されている．) これを vacuum character と言う．また，各モジュール W_j についてもその character ch_j を同様に考えることができる．このとき，Zhu [33] はある一般的な自然な条件の下で，各既約モジュールについて，$\mathrm{ch}_j(\tau)$ が上半平面の τ について収束すること，$\mathrm{ch}_j(\tau)$ たちの linear span が $SL(2,\mathbf{Z})$ による変数変換で閉じていることを証明した．これは頂点作用素代数における基本的な結果である．一方，作用素環のネットでは，Hilbert 空間 H が，回転の生成作用素による固有空間分解として，$H=\bigoplus_{n=0}^{\infty} H_n$ と書けるので，同様に vacuum character が考えられ，表現についてもやはり character が定義できる．(H の分解で正の n しか出てこないのは公理による．また各 $\dim H_n$ が有限であることは公理ではなく，また公理からも導かれないので，一般には問題がある．何らかの作用素環的条件から，これらの有限性を導くことが期待されるがそのような結果は知られていない．) Kac-Moody 代数や Virasoro 代数，あるいは格子から例を作った場合には，頂点作用素代数としての character と作用素環のネットとしての character は同じであることがわかるので，このような場合には，作用素環のネットとしての character についても $SL(2,\mathbf{Z})$ による変数変換がはたらいていることになる．しかし，このようなタイプの一般的結果は作用素環のネットについては知られていない．上で述べた，完全有理的な S^1 上の作用素環のネットと言うのは大変よいクラスなので，少なくともこの場合には，各 character が well-defined になり，$SL(2,\mathbf{Z})$ による変数変換がちゃんとはたらいているのではないかと我々は予想している．また，これまで作用素環のネットについても $SL(2,\mathbf{Z})$ の作用が考えられてきたが，それは [30] のように，表現のなす圏が modular であるということから生じていた．つまり，表現のなす圏の braiding から $SL(2,\mathbf{Z})$ の作用が生じているのであり，これが character の変数変換から生じる作用と同じであるか，ということが問題になる．これにあたる問題は頂点作用素代数では最

近，Huang [14] によって解決されたが，作用素環のネットでは未解決である．これも完全有理的な場合には正しいと予想している．この character のモジュラー変換の問題は，ブラックホール・エントロピーの作用素環的研究 [19] にも自然に現れるものである．

次に自己同型群の研究も頂点作用素代数の方が進んでいる．頂点作用素代数は代数系として自然な自己同型の概念がある．作用素環のネットの方は，直ちには明らかでないかもしれないがやはり自然な自己同型の概念がある．(考えている Hilbert 空間のユニタリ作用素でしかるべき条件を満たすものである．) 頂点作用素代数の自己同型群でもっとも有名なものは散在型有限単純群 26 個のうちの位数最大の群，モンスター [13] である．もともと McKay が，$SL(2, \mathbf{Z})$ による変数変換で不変なモジュラー関数，下記の j-関数の係数とモンスターの既約表現の次数がとても近いことに気づいたのが始まりである．

$$q^{-1} + 196884q + 21493760q^2 + 864299970q^3 + \cdots$$

(q^{-1} から始まるモジュラー関数は定数項を除いてこれに一致する．j-関数の定数項としては伝統的には 744 が用いられるが，ここでは頂点作用素代数との関係で 0 に取った．) たとえば，モンスターの自明でない最小次元の既約表現の次数は 196883 である．これに基づき，モジュラー関数と頂点作用素代数に関する Moonshine 予想 [5] が生まれた．これを満たすと期待される Moonshine 頂点作用素代数 $V^\natural$ が Frenkel-Lepowsky-Meurman [12] によって構成され，Moonshine 予想は Borcherds [4] によって証明された．(なお，“moonshine” とは英語の俗語で「たわごと」という意味である．モジュラー関数と散在型有限単純群が関係しているという考えがあまりにも「ばかげている」のでこの名がついた．) この Moonshine 頂点作用素代数は，$c = 24$ を持ち，character は上で書いた (定数項が 0 の) j-関数であり，自己同型群がモンスターである．自己同型は自動的に grading を保つので，各有限次元空間 $V_n^\natural$ はモンスターの表現空間になる．たとえば，$V_2^\natural$ は，モンスターの表現空間としては，自明な 1 次元表現と，自明でない最小次元である 196883 次元の既約表現の直和になっており，$196884 = 1 + 196883$ というわけである．

この Moonshine 頂点作用素代数 $V^\natural$ や，そのさまざまな類似物については，自己同型群に関連して大変多くの研究があるが，作用素環のネットについては対応する研究はほとんどなされていない．このテーマはこれからの重要な問題であろう．もともとの Frenkel-Lepowsky-Meurman による Moonshine 頂点作用素代数の構成は，Leech 格子から作った頂点作用素代数に twisted orbifold construction と呼ばれる構成法を適用するものであった．その後この頂点作用素代数は，$c = 1/2$ の Virasoro 頂点作用素代数 48 個のテンソル積の拡張になっていることが認識され，そのような $c = 1/2$ の Virasoro 頂点作用素代数のテンソル積の拡張は，“framed vertex operator algebra” と呼ばれ [8], [7] などによって詳しく研究されている．また，宮本 [29] はこの考え方に基づく $V^\natural$ の新しい構成法も与えている．実はこれらの作り方をまねすれば，[20] にあるように，対応する S^1 上の作用素環のネットを作ること自体は簡単であり，vacuum character が上の j-関数 (の定数項が 0 であるもの) になることも容易にわかる．自己同型群については，作用素環的道具がきちんと整備されていないのでそれほど容易ではないのだが，宮本が詳しく調べている位数 2 の自己同型 [28] は，作用素環のネットでも対応物を持つので，これを用いて自己同型群がモンスターになることを示せるのはほぼ確実と思われる．いずれにせよ，さらに詳しいこれからの研究が作用素環論の側で期待される．なお，最近 [12] の $V^\natural$ の構成をもっと直接的に作用素環のネットに翻訳した，Dong-Xu の結果もある．

最後に Riemann 面上の頂点作用素代数の理論について少しふれておこう．頂点作用素代数のパラメータ z を $\mathbf{C} \setminus \{0\}$ の座標と思い，話を Riemann 面などに一般化する試みが

いろいろ行われており，代数幾何学とのさまざまな関連が研究されているが，対応する作用素環のネットの話はまったく知られていない．これからの大きな研究テーマであろう．

以上いろいろと見てきたが，これら二つの理論，さらには共形場理論に対する他のさまざまな数学的アプローチの間の関係にはまだまだよくわかっていないことがたくさんあり，今見えているのはほんの氷山の一角であると思われる．これからさらに，新しい研究が発展していくことを期待したい．

References

[1] J. Böckenhauer & D. E. Evans, *Modular invariants, graphs and α-induction for nets of subfactors I*, Commun. Math. Phys. **197** (1998) 361–386. II **200** (1999) 57–103. III **205** (1999) 183–228.

[2] J. Böckenhauer, D. E. Evans & Y. Kawahigashi, *On α-induction, chiral projectors and modular invariants for subfactors*, Commun. Math. Phys. **208** (1999) 429–487.

[3] J. Böckenhauer, D. E. Evans & Y. Kawahigashi, *Chiral structure of modular invariants for subfactors*, Commun. Math. Phys. **210** (2000) 733–784.

[4] R. E. Borcherds, *Monstrous moonshine and monstrous Lie superalgebras*, Invent. Math. **109** (1992) 405–444.

[5] J. H. Conway & S. P. Norton, *Monstrous moonshine*, Bull. London Math. Soc. **11** (1979) 308–339

[6] P. Di Francesco, P. Mathieu & D. Sénéchal, "Conformal Field Theory", Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1996.

[7] C. Dong, R. L. Griess, Jr. & G. Höhn, *Framed vertex operator algebras, codes and the Moonshine module*, Commun. Math. Phys. **193** (1998) 407–448.

[8] C. Dong, G. Mason, Y. Zhu, *Discrete series of the Virasoro algebra and the moonshine module*, Proc. Symp. Pure. Math., Amer. Math. Soc. **56** II (1994) 295–316.

[9] S. Doplicher, R. Haag & J. E. Roberts, *Local observables and particle statistics*, I. Commun. Math. Phys. **23** (1971) 199–230; II. **35** (1974) 49–85.

[10] D. E. Evans & Y. Kawahigashi, "Quantum symmetries on operator algebras", Oxford University Press, 1998.

[11] K. Fredenhagen, K.-H. Rehren & B. Schroer, *Superselection sectors with braid group statistics and exchange algebras*, I. Commun. Math. Phys. **125** (1989) 201–226 (1989); II. Rev. Math. Phys. **Special issue** (1992) 113–157.

[12] I. Frenkel, J. Lepowsky, & A. Meurman, "Vertex operator algebras and the Monster", Academic Press, 1988.

[13] R. L. Griess, Jr., *The friendly giant*, Invent. Math. **69** (1982) 1–102.

[14] R. Haag, "Local Quantum Physics", 2nd ed., Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 1996

[15] Y.-Z. Huang, *Vertex operator algebras and the Verlinde conjecture*, math.QA/0406291.

[16] V. F. R. Jones, *Index for subfactors*, Invent. Math. **72** (1983) 1–25.

[17] Y. Kawahigashi & R. Longo, *Classification of local conformal nets. Case $c < 1$*, Ann. of Math. **160** (2004) 493–522. math-ph/0201015.

[18] Y. Kawahigashi & R. Longo, *Classification of two-dimensional local conformal nets with $c < 1$ and 2-cohomology vanishing for tensor categories*, Commun. Math. Phys. **244** (2004) 63–97. math-ph/0304022.

[19] Y. Kawahigashi & R. Longo, *Noncommutative spectral invariants and black hole entropy*, to appear in Commun. Math. Phys., math-ph/0405037.

[20] Y. Kawahigashi & R. Longo, *Local conformal nets arising from framed vertex operator algebras*, math.OA/0407263.

[21] Y. Kawahigashi, R. Longo & M. Müger, *Multi-interval subfactors and modularity of representations in conformal field theory*, Commun. Math. Phys. **219** (2001) 631–669.

[22] Y. Kawahigashi, N. Sato and M. Wakui, *(2+1)-dimensional topological quantum field theory from subfactors and Dehn surgery formula for 3-manifold invariants*, to appear in Adv. Math., math.OA/0208238.

[23] A. Kirillov Jr. & V. Ostrik, *On q-analog of McKay correspondence and ADE classification of* $sl^{(2)}$ *conformal field theories*, Adv. Math. **171** (2002) 183–227.

[24] R. Longo, *Index of subfactors and statistics of quantum fields I –II*, Commun. Math. Phys. **126** (1989) 217–247 & **130** (1990) 285–309.

[25] R. Longo, *A duality for Hopf algebras and for subfactors*, Commun. Math. Phys. **159** (1994) 133–150.

[26] R. Longo & K.-H. Rehren, *Nets of subfactors*, Rev. Math. Phys. **7** (1995) 567–597.

[27] R. Longo & F. Xu, *Topological sectors and a dichotomy in conformal field theory*, Commun. Math. Phys. **251** (2004) 321–364. math.OA/0309366.

[28] M. Miyamoto, *Griess algebras and conformal vectors in vertex operator algebras*, J. Alg. **179** (1996) 523–548.

[29] M. Miyamoto, *A new construction of the moonshine vertex operator algebra over the real number field*, Ann. of Math. **159** (2004) 535–596.

[30] K.-H. Rehren, *Braid group statistics and their superselection rules*, in "The Algebraic Theory of Superselection Sectors", D. Kastler ed., World Scientific 1990.

[31] R. F. Streater & A. S. Wightman, "PCT, spin and statistics, and all that" (Corrected third printing of the 1978 edition), Princeton University Press, 2000.

[32] F. Xu, *New braided endomorphisms from conformal inclusions*, Commun. Math. Phys. **192** (1998) 347–403.

[33] Y. Zhu, *Modular invariance of characters of vertex operator algebras*, J. Amer. Math. Soc. **9** (1996) 237–302.