1999 年度 3 年生解析学 VI 期末テスト

2000 年 2 月 8 日
河東泰之
数理科学研究科棟 323 号室 (電話 5465-7078)
e-mail: yasuyuki@ms.u-tokyo.ac.jp
http://kyokan.ms.u-tokyo.ac.jp/~yasuyuki/

解答は解答用紙に書いてください．この試験は自筆ノート持ち込み可で行います．

[1] Fatou の lemma のステートメントを書け．(ステートメントを書くだけです．この問題はできても点数は加算されません．不正解の場合のみ減点します．)

[2] $\mathbf{R}$ 上の関数 $\dfrac{1}{x+i}$ の Fourier 変換を求めよ．

[3] $f(x) \in L^2[0, 2\pi)$ とし，その Fourier 係数 a_n $(n \in \mathbf{Z})$ を

$$a_n = \int_0^{2\pi} f(x) e^{-inx}\, dx$$

と定める．$f(x)$ を周期 2π の関数として $\mathbf{R}$ 上の関数に延長する．このとき自然数 k について，$f(kx)$ の Fourier 係数を求めよ．

[4] (1) $\varphi(x) \in \mathcal{D}(\mathbf{R})$ に対し，次の極限値が存在することを示せ．

$$\lim_{\varepsilon \to 0+} \left(\int_\varepsilon^\infty \frac{\varphi(x)}{x}\, dx + \varphi(0) \log \varepsilon \right).$$

(2) $\varphi(x) \in \mathcal{D}(\mathbf{R})$ に対し上の極限値を $\langle T, \varphi \rangle$ とおくと，この T は超関数を定めることを示せ．

[5] $f(x)$ を，$\mathbf{R}$ 上の周期 2π の連続関数とする．これを $[0, 2\pi]$ 上の関数とみなしたときの Fourier 係数 a_n $(n \in \mathbf{Z})$ を

$$a_n = \int_0^{2\pi} f(x) e^{-inx}\, dx$$

と定める．$f(x)$ を $\mathbf{R}$ 上の tempered distribution とみなしたときの，その Fourier 変換を a_n を用いて表せ．

[6] $s \geq 0$, $f(x) \in H^s(\mathbf{R})$, $g(x) \in C_0^\infty(\mathbf{R})$ とする．このとき $f(x)g(x) \in H^s(\mathbf{R})$ であることを示せ．

Typeset by $\mathcal{AMS}$-TeX